

Plaquette 3 – Limites de suites

Suites (récurrence, limites) – Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Limites de référence (quand $n \rightarrow +\infty$) :

$$n, n^2, n^3, \sqrt{n} \rightarrow +\infty \quad \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Suites géométriques q^n :

- $q > 1$: $q^n \rightarrow +\infty$;
- $q = 1$: $q^n = 1$;
- $-1 < q < 1$: $q^n \rightarrow 0$;
- $q \leq -1$: pas de limite.

Formes indéterminées : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$. On lève l'indétermination en :

- **factorisant** par le terme de plus haut degré ;
- multipliant par la **quantité conjuguée** : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

Théorèmes de comparaison. Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un rang et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.

Théorème des gendarmes. Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un rang et si v_n et w_n tendent vers la même limite ℓ , alors $u_n \rightarrow \ell$.

Convergence monotone. Toute suite **croissante et majorée** converge ; toute suite croissante **non majorée** tend vers $+\infty$.

Somme géométrique ($q \neq 1$) : $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Correction de l'exercice 1 – Opérations sur les limites

On part des **limites de référence** et on applique les règles d'opérations (aucune forme indéterminée ici).

- a) $n^2 \rightarrow +\infty$, donc $3n^2 \rightarrow +\infty$ (produit par $3 > 0$), et $3n^2 - 5 \rightarrow +\infty$.
- b) $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, donc $b_n \rightarrow 4 + 0 = 4$.
- c) $n^3 \rightarrow +\infty$, donc $-2n^3 \rightarrow -\infty$ (produit par $-2 < 0$) ; et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$: la somme tend vers $-\infty$.
- d) $n + 2 \rightarrow +\infty$, donc

$$\frac{5}{n+2} \rightarrow 0$$

(un nombre fixe divisé par une quantité qui tend vers $+\infty$).

— **Piège en c)** : le signe du coefficient -2 change $+\infty$ en $-\infty$.

Réponse. a) $+\infty$ · b) 4 · c) $-\infty$ · d) 0 .

Correction de l'exercice 2 - Lever une forme infini moins infini

Dans les deux cas, on obtient la forme indéterminée $+\infty - \infty$: on **factorise par le terme dominant**.

a) Pour $n \geq 1$:

$$u_n = n^2 \left(1 - \frac{5}{n} \right)$$

— $n^2 \rightarrow +\infty$ et $1 - \frac{5}{n} \rightarrow 1$; le produit tend vers $+\infty$.

b) On factorise par $\sqrt{n}$ (car $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$) :

$$v_n = \sqrt{n} (\sqrt{n} - 1)$$

— $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{n} - 1 \rightarrow +\infty$: le produit tend vers $+\infty$.

À retenir : dans un polynôme en n , c'est le terme de **plus haut degré** qui impose la limite ; entre n et $\sqrt{n}$, c'est n qui l'emporte.

Réponse. a) $+\infty$ · b) $+\infty$.

Correction de l'exercice 3 - Quotients de polynômes

Forme $\frac{\infty}{\infty}$: on factorise numérateur **et** dénominateur par leur terme dominant.

a) On factorise par n^2 en haut et en bas :

$$a_n = \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

b) $b_n = \frac{n \left(1 + \frac{5}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}$: le premier facteur tend vers 0, le second vers 1, donc $b_n \rightarrow 0$.

c) $c_n = \frac{n^3 \left(1 - \frac{1}{n^3} \right)}{n \left(4 + \frac{2}{n} \right)} = n^2 \times \frac{1 - \frac{1}{n^3}}{4 + \frac{2}{n}}$: $n^2 \rightarrow +\infty$ et la fraction tend vers $\frac{1}{4}$, donc $c_n \rightarrow +\infty$.

— **Règle pratique** : même degré $\rightarrow$ quotient des coefficients dominants ; degré du haut plus petit $\rightarrow 0$; degré du haut plus grand $\rightarrow \pm\infty$.

Réponse. a) $\frac{3}{2}$ · b) 0 · c) $+\infty$.

Correction de l'exercice 4 - La quantité conjuguée

Forme $\infty - \infty$ avec des racines : on multiplie et divise par la **quantité conjuguée**, en utilisant $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

a) On multiplie par $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ en haut et en bas :

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$: $u_n \rightarrow 0$.

b) $v_n = \frac{(n^2 + n) - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}$. On factorise par n au dénominateur, avec

$\sqrt{n^2 + n} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ pour $n > 0$:

$$v_n = \frac{n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

— **Surprise de b)** : deux quantités qui tendent vers $+\infty$ ont une différence qui tend vers $\frac{1}{2}$, pas vers 0.

Réponse. a) 0 · b) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - Puissances et suites géométriques

On applique le résultat sur q^n selon la position de q :

$$-1 < q < 1 \Rightarrow q^n \rightarrow 0 \quad q > 1 \Rightarrow q^n \rightarrow +\infty$$

a) $q = 0,9 \in]-1 ; 1[: 0,9^n \rightarrow 0$.

b) $q = 1,1 > 1 : 1,1^n \rightarrow +\infty$.

c) $q = -0,5 \in]-1 ; 1[: (-0,5)^n \rightarrow 0$. Les termes changent de signe, mais leur valeur absolue $0,5^n$ tend vers 0.

d) $2^n \rightarrow +\infty$, donc $3 \times 2^n - 5 \rightarrow +\infty$.

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$, donc la suite tend vers 1.

— **Piège** : pour $q = -2$, $(-2)^n$ n'a **pas** de limite (les termes alternent entre de grands positifs et de grands négatifs).

Réponse. a) 0 · b) $+\infty$ · c) 0 · d) $+\infty$ · e) 1.

Correction de l'exercice 6 - Deux puissances en compétition

Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$: forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par la puissance dominante, 3^n :

$$u_n = \frac{3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

— Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$.

— Donc $u_n \rightarrow \frac{1-0}{1+0} = 1$.

— **Justification de la factorisation** : $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

— **Contrôle** : $u_{10} = \frac{59\,049 - 1\,024}{59\,049 + 1\,024} \approx 0,966$ — proche de 1 ✓

Réponse. $u_n \rightarrow 1$.

Correction de l'exercice 7 - Somme d'une suite géométrique

a) S_n est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme 1 :

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \rightarrow 0$, donc $S_n \rightarrow 2$.

- **Interprétation** : on parcourt la moitié d'un chemin de longueur 2, puis la moitié du reste, etc. On n'atteint jamais 2 ($S_n < 2$), mais on s'en approche autant qu'on veut.
- **Contrôle** : $S_3 = 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 = 1,875 = 2 - \frac{1}{8}$ ✓

Réponse. $S_n = 2 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 2$.

Correction de l'exercice 8 - Minorer pour conclure

Le terme $(-1)^n$ n'a pas de limite : on ne peut pas utiliser les règles d'opérations. On **minore** puis on applique le **théorème de comparaison** :

$$u_n \geq v_n \text{ et } v_n \rightarrow +\infty \Rightarrow u_n \rightarrow +\infty$$

a) Pour tout n , $(-1)^n \geq -1$, donc $u_n \geq n - 1$. Comme $n - 1 \rightarrow +\infty$, $u_n \rightarrow +\infty$.

b) $(-1)^n n \geq -n$, donc $v_n \geq n^2 - n = n(n - 1)$.

- $n(n - 1) \rightarrow +\infty$ (produit de deux quantités qui tendent vers $+\infty$).
- Par comparaison, $v_n \rightarrow +\infty$.

— **Attention** : une **majoration** par une suite qui tend vers $+\infty$ ne prouve rien ; il faut une **minoration** pour conclure à $+\infty$.

Réponse. a) $+\infty$ · b) $+\infty$.

Correction de l'exercice 9 - Le théorème des gendarmes

Les fonctions sinus et cosinus sont **bornées** entre -1 et 1 : on encadre, puis on applique le **théorème des gendarmes**.

a) $-1 \leq \sin n \leq 1$, et $n > 0$:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Les deux suites encadrantes tendent vers 0 : $u_n \rightarrow 0$.

b) $-1 \leq \cos n \leq 1$ et $n + 1 > 0$, donc

$$\frac{2n - 1}{n + 1} \leq v_n \leq \frac{2n + 1}{n + 1}$$

— $\frac{2n - 1}{n + 1} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 2$, et de même $\frac{2n + 1}{n + 1} \rightarrow 2$.

— Par le théorème des gendarmes, $v_n \rightarrow 2$.

— **Idée** : le terme borné est « écrasé » par un terme qui tend vers l'infini.

Réponse. a) 0 · b) 2.

Correction de l'exercice 10 - À partir de quel rang ?

a) $\frac{2}{n + 1} \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow \ell = 3$.

b) $u_n - 3 = \frac{2}{n + 1}$ (positif). On résout :

$$\frac{2}{n+1} < 10^{-3} \Leftrightarrow n+1 > \frac{2}{10^{-3}} = 2\,000 \Leftrightarrow n > 1\,999$$

(on a inversé des nombres positifs, ce qui change le sens de l'inégalité).

— Le premier entier qui convient est $n = 2\,000$.

— **Contrôle** : $u_{1999} - 3 = \frac{2}{2\,000} = 10^{-3}$ (pas strictement inférieur),
 $u_{2000} - 3 = \frac{2}{2\,001} < 10^{-3} \checkmark$

Sens de la définition : dire que $u_n \rightarrow 3$, c'est dire que, quelle que soit la précision exigée (10^{-3} , 10^{-6} ...), **tous** les termes finissent par être aussi proches de 3.

Réponse. $\ell = 3$; à partir du rang $n = 2\,000$.

Correction de l'exercice 11 - Croissante et majorée

a) Soit $f(x) = \sqrt{2+x}$, **croissante** sur $[0; +\infty[$, et $P(n) : \ll 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2 \gg$.

— **Initialisation** : $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,41$: $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2 \checkmark$

— **Hérédité** : si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$, on applique f croissante : $f(0) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(2)$,
soit $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2 \checkmark$

b) La suite est **croissante et majorée par 2** : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel $\ell \in [0; 2]$.

— f est continue, donc en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$: $\ell = \sqrt{2+\ell}$.

— En élevant au carré : $\ell^2 = 2 + \ell$, soit

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 2)(\ell + 1) = 0$$

— $\ell \geq 0$, donc $\ell = 2$.

— **Piège** : le théorème dit **que** la suite converge, pas **vers quoi** ; la limite se trouve ensuite avec l'équation du point fixe.

Réponse. (u_n) est croissante et majorée par 2 ; elle converge vers 2.

Correction de l'exercice 12 - Suites sans limite

a) Les termes valent alternativement 1 (rangs pairs) et -1 (rangs impairs).

— Si (u_n) convergeait vers ℓ , les termes finiraient tous dans l'intervalle $\left] \ell - \frac{1}{2}; \ell + \frac{1}{2} \right[$, de longueur 1 ; or cet intervalle ne peut contenir à la fois 1 et -1 , distants de 2.

— La suite **diverge**, sans tendre vers l'infini.

b) Les termes de rang pair $v_{2p} = 2p$ tendent vers $+\infty$; ceux de rang impair $v_{2p+1} = -(2p+1)$ tendent vers $-\infty$. La suite n'a **aucune limite**, ni finie ni infinie.

c) **Non** : (u_n) du a) est bornée par -1 et 1 mais diverge. Ce qui garantit la convergence, c'est bornée **et monotone** :

croissante + majorée $\Rightarrow$ convergente

Réponse. a) Non · b) Non (ni finie ni infinie) · c) Non : il faut en plus la monotonie.

Correction de l'exercice 13 - Croissante mais pas majorée

a) **Récurrence** : $u_0 = 1 \geq 1$; si $u_n \geq 1$, alors $\frac{1}{u_n} > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > u_n \geq 1$.

Variations : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$: la suite est **strictement croissante**.

b) Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $\ell \geq 1$ (les termes sont tous ≥ 1). La fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ est continue en ℓ , donc en passant à la limite :

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell} \Leftrightarrow \frac{1}{\ell} = 0$$

ce qui est **impossible**. La suite ne converge pas.

c) La suite est croissante et ne converge pas : elle n'est donc **pas majorée** (sinon elle convergerait). Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

— **Contrôle** : $u_1 = 2$, $u_2 = 2,5$, $u_3 = 2,9$ — la croissance ralentit mais ne s'arrête jamais.

Réponse. (u_n) est croissante, non majorée : $u_n \rightarrow +\infty$.

Correction de l'exercice 14 - Un seuil de décroissance

a) $0 < 0,85 < 1$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

b) **Existence** : $u_n \rightarrow 0$ signifie que tout intervalle ouvert contenant 0, par exemple $] -1 ; 1[$, contient tous les termes à partir d'un certain rang. Comme $u_n > 0$, on aura $u_n < 1$ à partir de ce rang.

Détermination (la suite est décroissante, on cherche le premier rang qui convient) :

— $u_{42} = 1\,000 \times 0,85^{42} \approx 1,085$;

— $u_{43} = 1\,000 \times 0,85^{43} \approx 0,922$.

Il faut donc 43 **heures** pour que la quantité descende sous 1 mg.

— **Remarque** : on résoudra exactement $0,85^n < 0,001$ avec le logarithme népérien (chapitre 6) ; la limite assure seulement que le seuil **existe**.

Réponse. a) 0 · b) $u_n < 1$ à partir de $n = 43$.

Correction de l'exercice 15 - Une population qui se stabilise

a) On exprime v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = p_{n+1} - 250 = 0,8 p_n + 50 - 250 = 0,8 p_n - 200 = 0,8(p_n - 250) = 0,8 v_n$$

(v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = 100 - 250 = -150$.

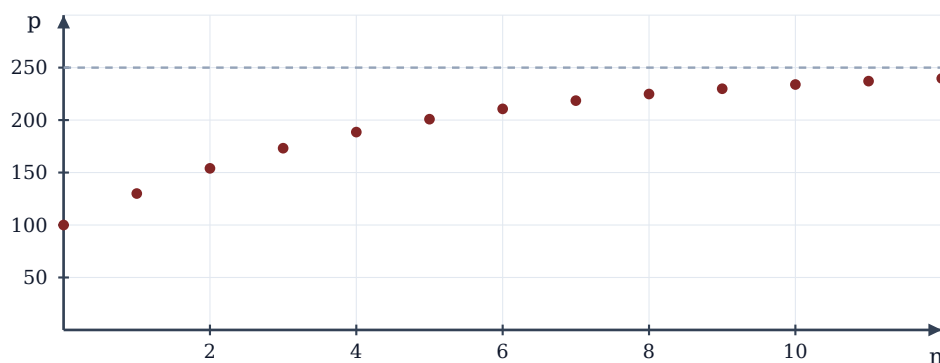
b) $v_n = -150 \times 0,8^n$, donc $p_n = v_n + 250 = 250 - 150 \times 0,8^n$.

— $0 < 0,8 < 1$, donc $0,8^n \rightarrow 0$ et $p_n \rightarrow 250$.

— **Contrôle** : $p_1 = 0,8 \times 100 + 50 = 130$ et $250 - 150 \times 0,8 = 130$ ✓

— **Interprétation** : la population se stabilise autour de 250 **oiseaux** — l’effectif pour lequel les départs (20 % de 250, soit 50) compensent exactement les arrivées.

Réponse. $v_{n+1} = 0,8 v_n$; $p_n = 250 - 150 \times 0,8^n \rightarrow 250$.



Les termes $p(n)$ se rapprochent de 250 (pointillé)