

Plaquette 2 - Suites explicites et récurrentes

Suites (récurrence, limites) — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sens de variation — trois méthodes :

- signe de la **différence** $u_{n+1} - u_n$;
- comparaison du **quotient** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (si tous les termes sont **strictement positifs**) ;
- si $u_n = f(n)$ avec f monotone sur $[0; +\infty[$, la suite a le **même sens de variation** que f .

△ Pour $u_{n+1} = f(u_n)$, le sens de variation de f ne donne **pas** directement celui de la suite : on raisonne par récurrence.

Raisonnement par récurrence. Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
2. **Hérédité** : si $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$, alors $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Suites bornées. (u_n) est **majorée** par M si $u_n \leq M$ pour tout n , **minorée** par m si $u_n \geq m$ pour tout n .

Représentation de $u_{n+1} = f(u_n)$. On trace la courbe de f et la droite $y = x$; on monte de u_n jusqu'à la courbe (ordonnée u_{n+1}), puis on rejoint la droite $y = x$ pour reporter u_{n+1} sur l'axe des abscisses : c'est l'**escalier** (ou l'escargot).

Somme utile. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ pour tout } n \Leftrightarrow (u_n) \text{ croissante}$$

Correction de l'exercice 1 - Termes et variations d'une suite explicite

a) On remplace n par sa valeur : $u_0 = 1$, $u_1 = 1 - 3 + 1 = -1$, $u_2 = 4 - 6 + 1 = -1$, $u_3 = 9 - 9 + 1 = 1$, $u_4 = 16 - 12 + 1 = 5$.

b) On remplace n par $n+1$ **partout** :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 1 = n^2 - n - 1$$

— **Différence** : $u_{n+1} - u_n = (n^2 - n - 1) - (n^2 - 3n + 1) = 2n - 2$.

c) $2n - 2 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1$.

— Pour $n \geq 1$, $u_{n+1} \geq u_n$: la suite est **croissante à partir du rang 1**.

— Elle n'est pas croissante dès le rang 0 : $u_1 = -1 < u_0 = 1$.

— **Piège** : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$; on remplace n par $n+1$ dans l'expression.

Réponse. $u_{n+1} - u_n = 2n - 2$: (u_n) est croissante à partir du rang 1.

Correction de l'exercice 2 - Conjecturer puis démontrer une formule

a) $u_1 = 3 \times 3 - 4 = 5$, $u_2 = 3 \times 5 - 4 = 11$, $u_3 = 3 \times 11 - 4 = 29$. On remarque $5 = 2 + 3$, $11 = 2 + 9$, $29 = 2 + 27$.

b) Soit $P(n)$: « $u_n = 2 + 3^n$ ».

— **Initialisation** : $2 + 3^0 = 3 = u_0$, donc $P(0)$ est vraie.

— **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain n , c'est-à-dire $u_n = 2 + 3^n$. Alors

$$u_{n+1} = 3u_n - 4 = 3(2 + 3^n) - 4 = 6 + 3^{n+1} - 4 = 2 + 3^{n+1}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion** : par récurrence, $u_n = 2 + 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Contrôle : $2 + 3^3 = 29 = u_3$ ✓ — la formule explicite donne par exemple $u_{10} = 2 + 59\,049 = 59\,051$ sans calculer les termes intermédiaires.

Réponse. $u_1 = 5$, $u_2 = 11$, $u_3 = 29$; $u_n = 2 + 3^n$ pour tout n .

Correction de l'exercice 3 - D'une forme à l'autre

a) On calcule le terme suivant :

$$u_{n+1} = 5 \times 0,8^{n+1} = 5 \times 0,8^n \times 0,8 = 0,8 u_n$$

La suite est **géométrique** de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = 5$.

b) **Différence** : $u_{n+1} - u_n = 0,8u_n - u_n = -0,2 u_n$.

— Pour tout n , $u_n = 5 \times 0,8^n > 0$ (produit de nombres positifs), donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

— La suite est **strictement décroissante**.

Autre méthode, par le quotient (les termes sont strictement positifs) : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,8 < 1$.

— **À retenir** : une suite géométrique de premier terme positif et de raison $0 < q < 1$ est décroissante.

Réponse. $u_{n+1} = 0,8 u_n$: suite géométrique, strictement décroissante.

Correction de l'exercice 4 - Variations par le quotient

a) $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{4}{2} = 2$, $u_3 = \frac{8}{3} \approx 2,67$.

b) Tous les termes sont **strictement positifs**, on peut comparer le quotient à 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$$

— $\frac{2n}{n+1} \geq 1 \Leftrightarrow 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1$ (on a multiplié par $n+1 > 0$).

— Donc $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq 1$: la suite est **croissante**.

— Elle n'est pas strictement croissante : $u_1 = u_2$ (le quotient vaut 1 pour $n = 1$), puis l'inégalité devient stricte.

Pourquoi le quotient : avec des puissances, $\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ se simplifie bien, alors que la différence $\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n}$ est pénible.

Réponse. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1} \geq 1$: (u_n) est croissante.

Correction de l'exercice 5 - Variations par une fonction

a) f est un quotient $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x + 1$, $v(x) = x + 3$, qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2(x+3) - (2x+1) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2}$$

— $f(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$: f est **strictement croissante**.

b) Pour tout n , $u_n = f(n)$, et $n < n+1$ entraîne $f(n) < f(n+1)$: la suite (u_n) est **strictement croissante**.

— **Contrôle** : $u_0 = \frac{1}{3} \approx 0,33$, $u_1 = \frac{3}{4} = 0,75$, $u_2 = 1$ ✓

— **Attention** : cette méthode vaut pour une suite **explicite** $u_n = f(n)$; elle ne s'applique pas à $u_{n+1} = f(u_n)$.

Réponse. $f(x) = \frac{5}{(x+3)^2} > 0$: (u_n) est strictement croissante.

Correction de l'exercice 6 - Monotonie et bornes par récurrence

a) $u_1 = \sqrt{6} \approx 2,449$, $u_2 = \sqrt{8,449} \approx 2,907$, $u_3 \approx 2,984$. L'escalier monte vers le point d'intersection de la courbe et de $y = x$, d'abscisse 3 : on conjecture que (u_n) est **croissante** et **tend vers 3**.

b) Soit $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ ». La fonction f est **croissante** sur $[0; +\infty[$ (racine carrée d'une fonction affine croissante).

— **Initialisation** : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6} \approx 2,45$, donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$.

— **Hérédité** : supposons $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. On applique f , **croissante**, qui conserve l'ordre :

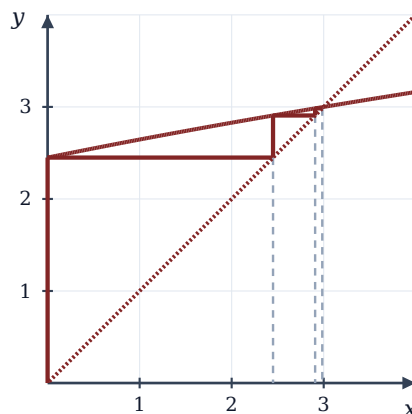
$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$$

soit $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$, et a fortiori $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$.

— **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout n : la suite est croissante et majorée par 3.

— **Clé** : $f(3) = \sqrt{9} = 3$ — le majorant choisi est le **point fixe** de f .

Réponse. (u_n) est croissante, comprise entre 0 et 3.



Escalier : $u_0 = 0$, $u_1 \approx 2,45$, $u_2 \approx 2,91$, $u_3 \approx 2,98$

Correction de l'exercice 7 - Une récurrence avec quotient

a) $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1/3}{4/3} = \frac{1}{4}$. On conjecture $u_n = \frac{1}{n+1}$.

b) Soit $P(n)$: « $u_n = \frac{1}{n+1}$ ».

— **Initialisation** : $\frac{1}{0+1} = 1 = u_0$ ✓

— **Hérédité** : supposons $u_n = \frac{1}{n+1}$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{n+2}$$

ce qui est $P(n+1)$.

— **Conclusion** : $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Point technique : on réduit le dénominateur au même dénominateur $1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$, puis diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Réponse. $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout n .

Correction de l'exercice 8 - L'escalier d'une suite arithmético-géométrique

a) **Construction** : depuis $u_0 = 0$, on monte jusqu'à D (ordonnée u_1), on se déplace horizontalement jusqu'à $y = x$, ce qui reporte u_1 en abscisse, et on recommence.

Calcul avec $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$:

- $u_1 = 0,5 \times 0 + 2 = 2$;
- $u_2 = 0,5 \times 2 + 2 = 3$;
- $u_3 = 0,5 \times 3 + 2 = 3,5$.

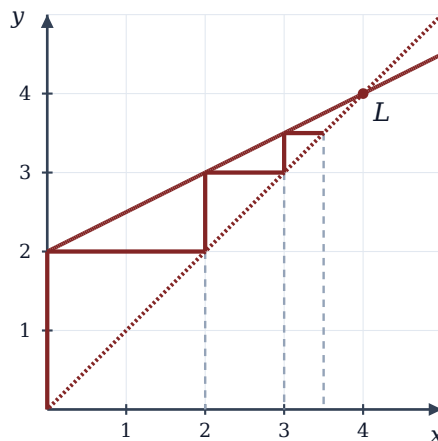
b) Les termes augmentent en se rapprochant de 4 : on conjecture que (u_n) est **croissante** et **converge vers 4**.

Le point L est l'**intersection** de D et de $y = x$; son abscisse vérifie

$$l = 0,5l + 2 \Leftrightarrow 0,5l = 2 \Leftrightarrow l = 4$$

— **Contrôle** : l'écart à 4 est divisé par 2 à chaque étape (4, 2, 1, 0,5), car $u_{n+1} - 4 = 0,5(u_n - 4)$.

Réponse. $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 3,5$; la suite semble croître vers 4.



$u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 3,5$: l'escalier monte vers $L(4 ; 4)$

Correction de l'exercice 9 - Une suite qui construit les carrés

a) $u_1 = 0 + 1 = 1$, $u_2 = 1 + 3 = 4$, $u_3 = 4 + 5 = 9$, $u_4 = 9 + 7 = 16$: on conjecture $u_n = n^2$.

b) Soit $P(n)$: « $u_n = n^2$ ».

— **Initialisation** : $u_0 = 0 = 0^2$ ✓

— **Hérédité** : supposons $u_n = n^2$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

(identité remarquable) : $P(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion** : $u_n = n^2$ pour tout n .

Interprétation : u_n est la somme des n premiers entiers impairs, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$. Géométriquement, on passe d'un carré de côté n à un carré de côté $n+1$ en ajoutant une « équerre » de $2n+1$ petits carrés.

Réponse. $u_n = n^2$: la somme des n premiers impairs est un carré.

Correction de l'exercice 10 - Somme des carrés

Soit $P(n)$: « $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

— **Initialisation** ($n=1$) : à gauche 1, à droite $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ ✓

— **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie. On ajoute le terme suivant $(n+1)^2$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

— Le crochet vaut $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$ (on vérifie en développant : $2n^2 + 3n + 4n + 6$).

— D'où $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, qui est exactement la formule au rang $n+1$ (puisque $2(n+1)+1 = 2n+3$).

— **Conclusion** : la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Réflexe : dans l'hérédité, on **factorise** par $(n+1)$ au lieu de tout développer ; on sait vers quelle forme aller.

Réponse. Hérédité : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Correction de l'exercice 11 - Encadrer une suite explicite

a) On part de la forme proposée et on réduit au même dénominateur :

$$3 - \frac{1}{n+1} = \frac{3(n+1) - 1}{n+1} = \frac{3n+2}{n+1} = u_n$$

b) **Variations** : quand n augmente, $n+1$ augmente, donc $\frac{1}{n+1}$ diminue, donc $3 - \frac{1}{n+1}$ augmente. Plus précisément,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

la suite est **strictement croissante**.

— **Minorant** : une suite croissante est minorée par son premier terme, $u_0 = 2$.

— **Majorant** : $\frac{1}{n+1} > 0$, donc $u_n < 3$ pour tout n .

$$2 \leq u_n < 3$$

— **Intérêt de la forme a)** : elle fait « voir » à la fois le sens de variation et la valeur 3 que la suite approche sans l'atteindre.

Réponse. $u_n = 3 - \frac{1}{n+1}$: croissante, et $2 \leq u_n < 3$.

Correction de l'exercice 12 - Un compte épargne

a) Un taux de 2 % multiplie le capital par $1 + \frac{2}{100} = 1,02$; on ajoute ensuite 100 € :

$$u_{n+1} = 1,02 u_n + 100$$

— $u_1 = 1\,020 + 100 = 1\,120$;

— $u_2 = 1,02 \times 1\,120 + 100 = 1\,242,40$;

— $u_3 = 1,02 \times 1\,242,40 + 100 = 1\,367,248$, soit environ 1 367,25 €.

b) **Récurrence** pour $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

— Initialisation : $u_0 = 1\,000 > 0$.

— Hérédité : si $u_n > 0$, alors $1,02u_n > 0$ et $u_{n+1} = 1,02u_n + 100 > 0$.

Variations : $u_{n+1} - u_n = 0,02 u_n + 100 > 0$ puisque $u_n > 0$. La suite est **strictement croissante**.

— **Remarque** : ce n'est ni une suite arithmétique (l'accroissement change) ni géométrique (le quotient change) — c'est une suite **arithmético-géométrique**.

Réponse. $u_1 = 1\,120$, $u_2 = 1\,242,40$, $u_3 \approx 1\,367,25$; (u_n) est positive et croissante.

Correction de l'exercice 13 - Une inégalité à partir d'un rang

Soit $P(n)$: « $2^n \geq n^2$ ».

— **Initialisation** au rang 4 (et non 0) : $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, donc $P(4)$ est vraie.

— **Hérédité** : soit $n \geq 4$ tel que $2^n \geq n^2$. Alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$$

— Il reste à comparer $2n^2$ et $(n+1)^2$:

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 \geq 0 \quad \text{pour } n \geq 3$$

(ses racines sont $1 \pm \sqrt{2}$, et $1 + \sqrt{2} \approx 2,41$).

— Donc $2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$: $P(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion** : $2^n \geq n^2$ pour tout $n \geq 4$.

Pourquoi « à partir de 4 » : $2^3 = 8 < 9 = 3^2$, la propriété est fausse au rang 3.

L'initialisation se fait au premier rang où elle est vraie **et** à partir duquel l'hérédité fonctionne.

Réponse. Initialisation $16 \geq 16$; hérédité $2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$.

Correction de l'exercice 14 - Divisibilité par récurrence

Soit $P(n)$: « il existe un entier k tel que $4^n - 1 = 3k$ ».

— **Initialisation** : $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$ ✓

— **Hérédité** : supposons $4^n - 1 = 3k$ avec k entier, c'est-à-dire $4^n = 3k + 1$. Alors

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(3k + 1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$$

et $4k + 1$ est un entier : $P(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion** : $4^n - 1$ est divisible par 3 pour tout n .

Vérification : $4^1 - 1 = 3$, $4^2 - 1 = 15$, $4^3 - 1 = 63 = 3 \times 21$ ✓

— **Astuce** : on isole 4^n grâce à l'hypothèse de récurrence, puis on fait apparaître $4^{n+1} = 4 \times 4^n$.

Réponse. $4^{n+1} - 1 = 3(4k + 1)$: la divisibilité se transmet.

Correction de l'exercice 15 - L'initialisation n'est pas une formalité

a) Supposons $10^n + 1 = 9k$ avec k entier, soit $10^n = 9k - 1$. Alors

$$10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10(9k - 1) + 1 = 90k - 9 = 9(10k - 1)$$

La propriété est donc **héréditaire**.

b) **Initialisation** : $10^0 + 1 = 2$, qui n'est pas divisible par 9. Et pour $n = 1 : 11$, non plus.

En fait, **aucun** $10^n + 1$ n'est divisible par 9 : $10^n - 1 = 99\dots 9$ est divisible par 9, donc $10^n + 1 = (10^n - 1) + 2$ laisse un reste de 2 dans la division par 9.

— **Conclusion** : une propriété héréditaire peut être **fausse pour tout** n . Sans initialisation, la récurrence ne démontre rien — la chaîne de dominos est bien construite, mais aucun domino ne tombe en premier.

Réponse. P est héréditaire mais jamais initialisée : elle est fausse pour tout n .