Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : suites auxiliaires, sommes et modèles

Suites (récurrence, limites) — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Suites de référence.

— **Arithmétique** de raison r : $u_n = u_0 + nr$, et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

— **Géométrique** de raison q : $u_n = u_0 q^n$, et pour $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

— **Limites** : $q^n \to 0$ si $|q| < 1$; $q^n \to +\infty$ si $q > 1$; pas de limite si $q \leq -1$.

Suite auxiliaire (méthode centrale du chapitre). Pour $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$: 1. on cherche le **point fixe** $\ell = \dfrac{b}{1-a}$; 2. on pose $v_n = u_n - \ell$, qui est **géométrique** de raison a ; 3. on en déduit $u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)$.

Théorèmes de limites.

— **Limite monotone** : croissante majorée ⇒ convergente ; croissante non majorée ⇒ $+\infty$.

— **Gendarmes** : $a_n \leq u_n \leq b_n$ avec $a_n, b_n \to \ell \Rightarrow u_n \to \ell$.

— **Comparaison** : $u_n \geq v_n$ et $v_n \to +\infty \Rightarrow u_n \to +\infty$.

— **Point fixe** : si $u_{n+1} = f(u_n)$, f **continue** et $u_n \to \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

Inégalité de Bernoulli : $(1+a)^n \geq 1 + na$ pour $a \geq -1$ — sert à montrer qu'une géométrique de raison > 1 diverge.

Recherche de seuil : on résout $q^n > A$ par le logarithme, $n > \dfrac{\ln A}{\ln q}$ (pour $q > 1$).

Correction de l'exercice 1 – Suite auxiliaire géométrique

a) **Point fixe** : $\ell = \dfrac{3}{1 - 0{,}5} = 6$ — d'où le choix de $v_n = u_n - 6$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0{,}5u_n + 3 - 6 = 0{,}5(u_n - 6) = 0{,}5\, v_n$$

— (v_n) est donc **géométrique** de raison 0,5, de premier terme $v_0 = 1 - 6 = -5$.

b) $v_n = -5 \times 0{,}5^n$, donc

$$u_n = 6 - 5 \times 0{,}5^n$$

— **Contrôles** : $u_1 = 6 - 2{,}5 = 3{,}5$, et directement $0{,}5 \times 1 + 3 = 3{,}5$ ✓ ; $u_2 = 6 - 1{,}25 = 4{,}75$ ✓

— **Limite** : $|0{,}5| < 1$ donc $0{,}5^n \to 0$ et $u_n \to 6$, **par valeurs inférieures** (la suite est croissante).

Réponse. $u_n = 6 - 5 \times 0{,}5^n \to 6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Récurrence et majoration

Initialisation : $u_0 = 0$, et $0 \leq 0 \leq 4$ ✓

Hérédité. Supposons $0 \leq u_n \leq 4$.

— Alors $4 \leq 3u_n + 4 \leq 16$.
— La fonction racine étant **croissante** : $2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4$.
— Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 4$ ✓ — la propriété est **héréditaire**.
— **Conclusion** : $0 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
— **Contrôles** : $u_1 = \sqrt{4} = 2$; $u_2 = \sqrt{10} \approx 3{,}162$; $u_3 = \sqrt{13{,}48} \approx 3{,}671$ — tous dans $[0\,;4]$ ✓
— **Suite de l'étude** : la suite est croissante et majorée par 4, donc convergente ; sa limite ℓ vérifie $\ell = \sqrt{3\ell + 4}$, soit $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$, d'où $\ell = 4$.

Réponse. Récurrence : $0 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow 2 \leq u_{n+1} \leq 4$.

Correction de l'exercice 3 – Somme de termes géométriques

Première somme : géométrique de raison 2, de 2^0 à 2^{10} (onze termes).

$$S = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2^{11} - 1 = 2\,047$$

— **Contrôle** : la somme des puissances de 2 jusqu'à 2^n vaut toujours $2^{n+1} - 1$ ✓

Seconde somme : raison 0,2, dix termes, premier terme 3.

$$S' = 3 \times \frac{1 - 0{,}2^{10}}{1 - 0{,}2} = 3 \times \frac{1 - 1{,}024 \times 10^{-7}}{0{,}8} = 3{,}75 \times \left(1 - 1{,}024 \times 10^{-7}\right)$$

— Soit $S' \approx 3{,}7499996$.
— **Interprétation** : la somme **infinie** vaudrait exactement $\frac{3}{0{,}8} = 3{,}75$; dix termes en donnent déjà sept décimales ✓
— **Formule à retenir** : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, et $\frac{1}{1 - q}$ à l'infini si $|q| < 1$.

Réponse. $S = 2\,047$ et $S' \approx 3{,}75$.

Correction de l'exercice 4 – Capital et intérêts composés

— **Modèle** : $C_n = 2000 \times 1{,}03^n$ — suite **géométrique** de raison 1,03.
— **Inéquation** : $2000 \times 1{,}03^n > 3000$, soit $1{,}03^n > 1{,}5$.
— **Logarithme** (croissant, donc le sens est conservé) :

$$n > \frac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}03} = \frac{0{,}405465}{0{,}029559} \approx 13{,}72$$

— **Réponse** : au bout de **14 ans**.
— **Contrôles** : $C_{13} = 2000 \times 1{,}4685 = 2\,937$ € $< 3\,000$; $C_{14} = 2000 \times 1{,}5126 \approx 3\,025$ € $> 3\,000$ ✓
— **Repère utile** : à 3 %, le capital double en $\frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}4$ ans (règle approximative des « 70 / 3 »).

Réponse. Au bout de 14 ans ($C_{14} \approx 3\,025$ €).

Correction de l'exercice 5 – Modèle de population

a) **Point fixe** : $\ell = \frac{500}{1 - 0{,}8} = 2\,500$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— On pose $v_n = p_n - 2500$: alors $v_{n+1} = 0{,}8v_n$, avec $v_0 = 1\,500$.

$$p_n = 2500 + 1500 \times 0{,}8^n$$

b) $0{,}8^n \to 0$, donc $p_n \to 2\,500$ individus.

— **Contrôles** : $p_1 = 2500 + 1200 = 3\,700$, et directement $0{,}8 \times 4000 + 500 = 3\,700$ ✓ ; $p_5 = 2500 + 1500 \times 0{,}32768 \approx 2\,992$ ✓

— **Sens du modèle** : la population **décroît** vers un équilibre de 2 500 poissons, où les 20 % de pertes annuelles (500) sont exactement compensés par le repeuplement de 500.

— **Vérification de l'équilibre** : $0{,}8 \times 2500 + 500 = 2\,500$ ✓

Réponse. a) $p_n = 2500 + 1500 \times 0{,}8^n$ · b) limite 2 500.

Correction de l'exercice 6 – Théorème des gendarmes

— **Encadrement du numérateur** : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $2n - 1 \leq 2n + (-1)^n \leq 2n + 1$.

— Le dénominateur $n + 3$ étant **positif**, l'encadrement se conserve :

$$\frac{2n-1}{n+3} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{n+3}$$

— **Limites des bornes** : en factorisant par n, $\dfrac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \to 2$ et $\dfrac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \to 2$.

— **Gendarmes** : $u_n \to 2$.

— **Contrôles** : $u_{10} = \dfrac{21}{13} \approx 1{,}615$; $u_{100} = \dfrac{199}{103} \approx 1{,}932$; $u_{1000} \approx 1{,}9930$ ✓

— **Réflexe** : face à un $(-1)^n$ **borné** noyé dans une expression qui tend vers l'infini, on encadre — jamais on ne cherche la limite du terme alterné.

Réponse. $u_n \to 2$.

Correction de l'exercice 7 – Suite croissante non majorée

Étape 1 : positivité et croissance.

— Par récurrence, $u_n \geq 1 > 0$: si $u_n \geq 1$, alors $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n} \geq 1 + 1 = 2 \geq 1$ ✓

— Donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} > 0$: la suite est **strictement croissante**.

Étape 2 : divergence. Comme $u_n \geq 1$, on a $\sqrt{u_n} \geq 1$, donc

$$u_{n+1} \geq u_n + 1$$

— Par récurrence immédiate, $u_n \geq u_0 + n = 1 + n$.

— Or $1 + n \to +\infty$: par **comparaison**, $u_n \to +\infty$.

— **Contrôles** : $u_1 = 2$; $u_2 = 2 + 1{,}414 = 3{,}414$; $u_3 = 5{,}262$; $u_4 = 7{,}556$ — bien supérieurs à $1 + n$ ✓

— **Attention au piège** : « croissante » ne suffit pas à conclure ($u_n = 1 - \frac{1}{n}$ croît et converge). Il faut prouver qu'elle n'est **pas majorée**.

Réponse. $u_n \geq 1 + n$ par récurrence, donc $u_n \to +\infty$.

Correction de l'exercice 8 – Suites imbriquées

— **Calcul de d_{n+1}** :

$$d_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_n + 3v_n - 2u_n - 2v_n}{4} = \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{d_n}{4}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— (d_n) est **géométrique** de raison $\frac{1}{4}$, avec $d_0 = 6$, donc $d_n = 6 \times 0{,}25^n \to 0$.

— **Monotonie** : $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{d_n}{2} > 0$, donc (u_n) **croît** ; et $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{d_n}{4} < 0$, donc (v_n) **décroît**.

— Les suites sont **adjacentes** : elles convergent vers une **même limite** ℓ.

— **Calcul de** ℓ : la quantité $t_n = u_n + 2v_n$ vérifie $t_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + 3v_n}{2} = u_n + 2v_n = t_n$ — elle est **constante**, égale à $2 + 16 = 18$.

— À la limite : $\ell + 2\ell = 18$, donc $\ell = 6$.

— **Contrôles** : $u_1 = 5$, $v_1 = \frac{2+24}{4} = 6{,}5$, $d_1 = 1{,}5 = \frac{6}{4}$ ✓ ; $u_1 + 2v_1 = 5 + 13 = 18$ ✓

Réponse. $d_n = 6 \times 0{,}25^n \to 0$; les deux suites tendent vers 6.

Correction de l’exercice 9 – Somme et suite arithmétique

— **Modèle** : somme des 30 premiers entiers — suite **arithmétique** de raison 1.

$$\sum_{k=1}^{30} k = \frac{30 \times 31}{2} = 465$$

— **Formule générale** : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

— **Contrôle par la méthode de Gauss** : en appariant $1 + 30 = 31$, $2 + 29 = 31$, … on obtient 15 paires de somme 31, soit $15 \times 31 = 465$ ✓

— **Variante** : si l’on empilait 2 briques de plus par marche $(1, 3, 5, \ldots)$, la somme des 30 premiers **impairs** vaudrait $30^2 = 900$.

— **Contrôle d’ordre de grandeur** : la moyenne des marches est $\frac{1+30}{2} = 15{,}5$, et $30 \times 15{,}5 = 465$ ✓

Réponse. $\frac{30 \times 31}{2} = 465$ briques.

Correction de l’exercice 10 – Amortissement d’un prêt

a) La dette est majorée des intérêts, puis diminuée du remboursement :

$$d_{n+1} = 1{,}02\, d_n - 1200, \qquad d_0 = 10\,000$$

— **Point fixe** : $\ell = \frac{-1200}{1 - 1{,}02} = \frac{-1200}{-0{,}02} = 60\,000$.

— On pose $v_n = d_n - 60000$: $v_{n+1} = 1{,}02 v_n$, avec $v_0 = -50\,000$.

$$d_n = 60\,000 - 50\,000 \times 1{,}02^n$$

b) On résout $d_n \leq 0$, soit $1{,}02^n \geq 1{,}2$:

$$n \geq \frac{\ln 1{,}2}{\ln 1{,}02} = \frac{0{,}18232}{0{,}019803} \approx 9{,}21$$

— **Réponse** : la dette s’éteint la **10e année**.

— **Contrôles** : $d_9 = 60000 - 50000 \times 1{,}19509 \approx 245$ € ; $d_{10} = 60000 - 50000 \times 1{,}21899 \approx -950$ € ✓

— **Lecture financière** : la dernière annuité n’est que partielle ($245 \times 1{,}02 \approx 250$ €), le total remboursé étant d’environ $9 \times 1200 + 250 = 11\,050$ €.

Réponse. a) $d_n = 60\,000 - 50\,000 \times 1{,}02^n$ · b) 10 ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Limite d'un quotient de suites

— **Terme dominant** : l'exponentielle 3^n **domine** n^2 (croissances comparées).
— On **factorise** par 3^n au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{3^n\left(1 + \frac{n^2}{3^n}\right)}{3^n\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)} = \frac{1 + \frac{n^2}{3^n}}{1 + \frac{1}{3^n}}$$

— **Limites** : $\frac{n^2}{3^n} \to 0$ et $\frac{1}{3^n} \to 0$.
— Donc $u_n \to \frac{1+0}{1+0} = 1$.
— **Contrôles** : $u_5 = \frac{243+25}{244} \approx 1{,}0984$; $u_{10} = \frac{59049+100}{59050} \approx 1{,}00168$ ✓
— **Règle générale** : dans un quotient, on factorise par le terme qui **croît le plus vite** ; la hiérarchie est $\ln n \ll n^\alpha \ll q^n$ (pour $q > 1$) $\ll n!$.

Réponse. $u_n \to 1$.

Correction de l'exercice 12 – Seuil et algorithme

Résolution. $5 \times 0{,}7^n < 0{,}01$ équivaut à $0{,}7^n < 0{,}002$.

— En passant au logarithme (attention, $\ln 0{,}7 < 0$: le sens **s'inverse**) :

$$n > \frac{\ln 0{,}002}{\ln 0{,}7} = \frac{-6{,}2146}{-0{,}35667} \approx 17{,}42$$

— **Réponse** : $n = 18$.
— **Contrôles** : $u_{17} = 5 \times 0{,}7^{17} \approx 0{,}01163 > 0{,}01$; $u_{18} \approx 0{,}00814 < 0{,}01$ ✓

Algorithme.

```
n = 0
```

```
u = 5.0
while u >= 0.01:
    u = u * 0.7
    n = n + 1
print(n)
```

— **Terminaison** : (u_n) est **décroissante de limite** 0, donc elle finit par passer sous tout seuil strictement positif.
— **Piège du logarithme** : diviser par un logarithme **négatif** renverse l'inégalité — l'erreur la plus fréquente sur ce type d'exercice.

Réponse. $n = 18$.

Correction de l'exercice 13 – Récurrence et inégalité

Méthode 1 — inégalité de Bernoulli. Avec $a = 0{,}5 \geq -1$,

$$(1 + 0{,}5)^n \geq 1 + 0{,}5n$$

C'est exactement l'énoncé.

Méthode 2 — récurrence.

— **Initialisation** ($n = 1$) : $1{,}5 \geq 1{,}5$ ✓
— **Hérédité** : supposons $1{,}5^n \geq 1 + 0{,}5n$. En multipliant par $1{,}5 > 0$:

$$1{,}5^{n+1} \geq 1{,}5(1 + 0{,}5n) = 1{,}5 + 0{,}75n$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Or $1{,}5 + 0{,}75n \geq 1 + 0{,}5(n+1) = 1{,}5 + 0{,}5n$, puisque $0{,}75n \geq 0{,}5n$ pour $n \geq 0$ ✓
— **Conclusion** : l'inégalité vaut pour tout $n \geq 1$.
— **Contrôles** : $n = 4$ donne $5{,}0625 \geq 3$ ✓ ; $n = 10$ donne $57{,}67 \geq 6$ ✓ — l'écart se creuse très vite.
— **Utilité** : cette minoration **linéaire** prouve que $1{,}5^n \to +\infty$ par comparaison, sans invoquer de théorème sur les géométriques.

Réponse. Bernoulli avec $a = 0{,}5$, ou récurrence directe.

Correction de l'exercice 14 – Suite définie par une somme

— **Décomposition** : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
— **Vérification** : $\dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k(k+1)}$ ✓
— **Télescopage** : les termes intermédiaires se **compensent** deux à deux,

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

— Soit $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.
— **Contrôles** : $S_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{1\times 2} = \dfrac{1}{2}$ ✓ ; $S_3 = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{6+2+1}{12} = \dfrac{3}{4}$ ✓
— **Limite** : $S_n = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}} \to 1$.
— **Technique clé** : écrire le terme général comme une **différence de deux termes consécutifs** est la seule façon de sommer exactement ce type d'expression.

Réponse. $S_n = \dfrac{n}{n+1} \to 1$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : type bac

a) **Minoration par récurrence** : $u_0 = 5 \geq 2$; et si $u_n \geq 2$, alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2} \geq \dfrac{4}{2} = 2$ ✓

— **Décroissance** :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2}{2} - u_n = \frac{2 - u_n}{2} \leq 0$$

puisque $u_n \geq 2$ ✓
— La suite est **décroissante et minorée** : elle **converge**.

b) **Point fixe** : $\ell = \dfrac{1}{1 - 0{,}5} = 2$. On pose $v_n = u_n - 2$, qui vérifie $v_{n+1} = 0{,}5 v_n$ avec $v_0 = 3$.

$$u_n = 2 + 3 \times 0{,}5^n \longrightarrow 2$$

— **Contrôles** : $u_1 = 3{,}5$, et directement $\dfrac{5+2}{2} = 3{,}5$ ✓ ; $u_2 = 2{,}75$ ✓

c) On résout $3 \times 0{,}5^n < 10^{-3}$, soit $0{,}5^n < \dfrac{1}{3000}$:

$$n > \frac{\ln(1/3000)}{\ln 0{,}5} = \frac{-8{,}0064}{-0{,}69315} \approx 11{,}55$$

— **Réponse** : $n = 12$.
— **Contrôles** : $u_{11} - 2 = 3 \times 0{,}5^{11} \approx 1{,}465 \times 10^{-3}$; $u_{12} - 2 = 7{,}32 \times 10^{-4} < 10^{-3}$ ✓

Réponse. b) $u_n = 2 + 3 \times 0{,}5^n \to 2$ · c) $n = 12$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).