

Plaquette 3 - Limites de suites

Suites (récurrence, limites) — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Pour trouver une limite, on part des **limites de référence**, on applique les **règles d'opérations**, et si l'on tombe sur une **forme indéterminée** on transforme l'écriture (factoriser par le terme dominant, multiplier par la quantité conjuguée). Quand le calcul direct échoue, on **compare** ou on **encadre** (gendarmes).

Exercice 1 - Opérations sur les limites

Déterminer la limite de chaque suite quand $n \rightarrow +\infty$:

a) $a_n = 3n^2 - 5$

b) $b_n = 4 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $c_n = -2n^3 + \frac{1}{n}$

d) $d_n = \frac{5}{n+2}$

Exercice 2 - Lever une forme infini moins infini

Déterminer la limite de :

a) $u_n = n^2 - 5n$

b) $v_n = n - \sqrt{n}$

Exercice 3 - Quotients de polynômes

Déterminer la limite de :

a) $a_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^2 - n}$

b) $b_n = \frac{n+5}{n^2+1}$

c) $c_n = \frac{n^3-1}{4n+2}$

Exercice 4 - La quantité conjuguée

Déterminer la limite de :

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b) $v_n = \sqrt{n^2+n} - n$

Exercice 5 - Puissances et suites géométriques

Déterminer la limite éventuelle de :

a) $0,9^n$

b) $1,1^n$

- c) $(-0,5)^n$
- d) $3 \times 2^n - 5$
- e) $\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$

Exercice 6 - Deux puissances en compétition

Déterminer la limite de $u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$.

Exercice 7 - Somme d'une suite géométrique

Soit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

- a) Exprimer S_n en fonction de n .
- b) Déterminer la limite de S_n et l'interpréter.

Exercice 8 - Minorer pour conclure

Déterminer la limite de :

- a) $u_n = n + (-1)^n$
- b) $v_n = n^2 + (-1)^n n$

Exercice 9 - Le théorème des gendarmes

Déterminer la limite de :

- a) $u_n = \frac{\sin n}{n}$ (pour $n \geq 1$)
- b) $v_n = \frac{2n + \cos n}{n + 1}$

Exercice 10 - À partir de quel rang ?

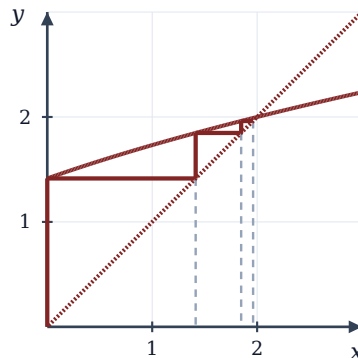
Soit $u_n = 3 + \frac{2}{n+1}$.

- a) Déterminer la limite ℓ de (u_n) .
- b) À partir de quel rang a-t-on $u_n - \ell < 10^{-3}$?

Exercice 11 - Croissante et majorée

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

- Démontrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ pour tout n .
- En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.



Courbe de $x \mapsto \sqrt{2+x}$, droite $y=x$ et premiers termes

Exercice 12 - Suites sans limite

- La suite $u_n = (-1)^n$ a-t-elle une limite ?
- Même question pour $v_n = (-1)^n n$.
- Une suite bornée est-elle forcément convergente ?

Exercice 13 - Croissante mais pas majorée

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

- Démontrer par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout n , puis que (u_n) est croissante.
- On suppose que (u_n) converge vers un réel ℓ . Montrer que c'est impossible.
- Conclure sur la limite de (u_n) .

Exercice 14 - Un seuil de décroissance

Un médicament est éliminé à raison de 15 % par heure. On note $u_n = 1\,000 \times 0,85^n$ la quantité restante (en mg) après n heures.

- Déterminer la limite de (u_n) .
- Justifier qu'il existe un rang à partir duquel $u_n < 1$, puis le déterminer à la calculatrice.

Exercice 15 - Une population qui se stabilise

Une réserve compte 100 oiseaux. Chaque année, 20 % des oiseaux partent et 50 nouveaux arrivent : $p_0 = 100$ et $p_{n+1} = 0,8 p_n + 50$.

- Soit $v_n = p_n - 250$. Montrer que (v_n) est géométrique.
- En déduire p_n en fonction de n , puis sa limite.