

Plaquette 2 – Suites explicites et récurrentes

Suites (récurrence, limites) – Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Une suite se donne **explicitement** ($u_n = f(n)$: on calcule n'importe quel terme directement) ou **par récurrence** ($u_{n+1} = f(u_n)$: chaque terme dépend du précédent). On calcule des termes, on étudie le **sens de variation**, et on démontre les propriétés conjecturées **par récurrence**.

Exercice 1 – Termes et variations d'une suite explicite

Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 3n + 1$.

- Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 .
- Exprimer u_{n+1} en fonction de n , puis calculer $u_{n+1} - u_n$.
- En déduire le sens de variation de la suite.

Exercice 2 – Conjecturer puis démontrer une formule

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

- Calculer u_1, u_2, u_3 .
- Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + 3^n$.

Exercice 3 – D'une forme à l'autre

Soit $u_n = 5 \times 0,8^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Quelle est la nature de la suite ?
- Déterminer son sens de variation.

Exercice 4 – Variations par le quotient

Soit $u_n = \frac{2^n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

- Calculer u_1, u_2, u_3 .
- Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et étudier le sens de variation de (u_n) .

Exercice 5 – Variations par une fonction

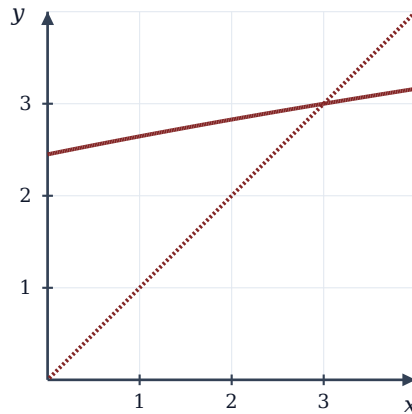
Soit $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ sur $[0; +\infty[$.

- Étudier les variations de f .
- En déduire le sens de variation de (u_n) .

Exercice 6 - Monotonie et bornes par récurrence

Soit $f(x) = \sqrt{x+6}$ et (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. La figure montre la courbe de f et la droite $y = x$.

- Construire u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses. Quelle conjecture ?
- Démontrer par récurrence que, pour tout n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.



Courbe de f et droite $y = x$

Exercice 7 - Une récurrence avec quotient

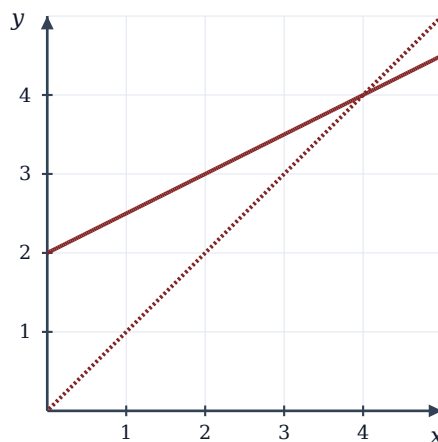
Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

- Calculer u_1, u_2 et u_3 , et conjecturer une expression de u_n .
- Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 8 - L'escalier d'une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$. On a tracé la droite D d'équation $y = 0,5x + 2$ et la droite $y = x$.

- Construire les termes u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses, puis les calculer.
- Conjecturer le comportement de la suite. Quel point de la figure l'explique ?



Droite D (trait plein) et droite $y = x$ (pointillé)

Exercice 9 - Une suite qui construit les carrés

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

- Calculer les premiers termes et conjecturer une formule.
- La démontrer par récurrence.

Exercice 10 - Somme des carrés

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 11 - Encadrer une suite explicite

Soit $u_n = \frac{3n+2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que $u_n = 3 - \frac{1}{n+1}$.
- En déduire que (u_n) est croissante, minorée par 2 et majorée par 3.

Exercice 12 - Un compte épargne

On place 1 000 € sur un compte rémunéré à 2 % par an ; chaque année, après les intérêts, on ajoute 100 €. On note u_n le capital après n années ($u_0 = 1\,000$).

- Justifier que $u_{n+1} = 1,02 u_n + 100$ et calculer u_1, u_2, u_3 .
- Démontrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n , puis que la suite est croissante.

Exercice 13 - Une inégalité à partir d'un rang

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

On pourra utiliser le fait que, pour $n \geq 3$, $n^2 - 2n - 1 \geq 0$.

Exercice 14 - Divisibilité par récurrence

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 15 - L'initialisation n'est pas une formalité

Soit $P(n)$: « $10^n + 1$ est divisible par 9 ».

- Montrer que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.
- $P(n)$ est-elle vraie pour tout n ? Conclure.