# Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : suites auxiliaires, sommes et modèles

## Suites (récurrence, limites) — Terminale spé maths

Exercices

**Méthode**

On introduit une **suite auxiliaire** pour se ramener à une suite géométrique, on somme des termes, on encadre par les **gendarmes**, et on traite les problèmes de modélisation (capital, population, seuils) de type bac.

### Exercice 1 – Suite auxiliaire géométrique

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3$. On pose $v_n = u_n - 6$.

a) Montrer que $(v_n)$ est géométrique.

b) En déduire $u_n$ et sa limite.

### Exercice 2 – Récurrence et majoration

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n$.

### Exercice 3 – Somme de termes géométriques

Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 1024$, puis $S' = \sum_{k=0}^{9} 3 \times 0{,}2^k$.

### Exercice 4 – Capital et intérêts composés

On place 2 000 € à 3 % par an. Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 3 000 € ?

### Exercice 5 – Modèle de population

Une population de poissons vérifie $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 500$, avec $p_0 = 4\,000$ (en individus, $n$ en années).

a) Déterminer $p_n$.

b) Que devient la population à long terme ?

### Exercice 6 – Théorème des gendarmes

Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{n + 3}$.

### Exercice 7 – Suite croissante non majorée

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$. Montrer que $(u_n)$ tend vers $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

### Exercice 8 – Suites imbriquées

Soient $u_0 = 2$, $v_0 = 8$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$

Étudier $d_n = v_n - u_n$ et en déduire les limites.

### Exercice 9 – Somme et suite arithmétique

Un escalier a 30 marches. On empile 1 brique sur la première, 2 sur la deuxième, …, 30 sur la trentième. Combien de briques au total ?

### Exercice 10 – Amortissement d'un prêt

On emprunte 10 000 € à 2 % par an et l'on rembourse 1 200 € à la fin de chaque année. Soit $d_n$ la dette après $n$ années.

a) Exprimer $d_{n+1}$ en fonction de $d_n$, puis $d_n$.

b) En combien d'années la dette est-elle éteinte ?

### Exercice 11 – Limite d'un quotient de suites

Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{3^n + n^2}{3^n + 1}$.

### Exercice 12 – Seuil et algorithme

Soit $u_n = 5 \times 0{,}7^n$. Déterminer le plus petit $n$ tel que $u_n < 0{,}01$, et écrire l'algorithme correspondant.

### Exercice 13 – Récurrence et inégalité

Démontrer que pour tout $n \geq 1$ : $1{,}5^n \geq 1 + 0{,}5n$.

### Exercice 14 – Suite définie par une somme

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$. Montrer que $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ et donner sa limite.

### Exercice 15 – Synthèse : type bac

Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2}$.

a) Montrer que $(u_n)$ est décroissante et minorée par 2.

b) Déterminer $u_n$ explicitement et sa limite.

c) Déterminer le plus petit $n$ tel que $u_n - 2 < 10^{-3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).