

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse :
suites auxiliaires, sommes et modèles
Suites (récurrence, limites) — Terminale spé maths
Exercices

Méthode

On introduit une **suite auxiliaire** pour se ramener à une suite géométrique, on somme des termes, on encadre par les **gendarmes**, et on traite les problèmes de modélisation (capital, population, seuils) de type bac.

Exercice 1 - Suite auxiliaire géométrique

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$. On pose $v_n = u_n - 6$.

- Montrer que (v_n) est géométrique.
- En déduire u_n et sa limite.

Exercice 2 - Récurrence et majoration

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 4$ pour tout n .

Exercice 3 - Somme de termes géométriques

Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1024$, puis $S' = \sum_{k=0}^9 3 \times 0,2^k$.

Exercice 4 - Capital et intérêts composés

On place 2 000 € à 3 % par an. Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 3 000 € ?

Exercice 5 - Modèle de population

Une population de poissons vérifie $p_{n+1} = 0,8p_n + 500$, avec $p_0 = 4\,000$ (en individus, n en années).

- Déterminer p_n .
- Que devient la population à long terme ?

Exercice 6 - Théorème des gendarmes

Déterminer la limite de $u_n = \frac{2n + (-1)^n}{n + 3}$.

Exercice 7 - Suite croissante non majorée

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$. Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 8 - Suites imbriquées

Soient $u_0 = 2$, $v_0 = 8$ et
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

Étudier $d_n = v_n - u_n$ et en déduire les limites.

Exercice 9 - Somme et suite arithmétique

Un escalier a 30 marches. On empile 1 brique sur la première, 2 sur la deuxième, ..., 30 sur la trentième. Combien de briques au total ?

Exercice 10 - Amortissement d'un prêt

On emprunte 10 000 € à 2 % par an et l'on rembourse 1 200 € à la fin de chaque année. Soit d_n la dette après n années.

- Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n , puis d_n .
- En combien d'années la dette est-elle éteinte ?

Exercice 11 - Limite d'un quotient de suites

Déterminer la limite de $u_n = \frac{3^n + n^2}{3^n + 1}$.

Exercice 12 - Seuil et algorithme

Soit $u_n = 5 \times 0,7^n$. Déterminer le plus petit n tel que $u_n < 0,01$, et écrire l'algorithme correspondant.

Exercice 13 - Récurrence et inégalité

Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $1,5^n \geq 1 + 0,5n$.

Exercice 14 - Suite définie par une somme

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. Montrer que $S_n = \frac{n}{n+1}$ et donner sa limite.

Exercice 15 - Synthèse : type bac

Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2}$.

- Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 2.
- Déterminer u_n explicitement et sa limite.
- Déterminer le plus petit n tel que $u_n - 2 < 10^{-3}$.