

Plaquette 3 - Loi binomiale

Variables aléatoires (lois) — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Schéma de Bernoulli. On répète n fois, de façon **indépendante**, une épreuve à deux issues (succès de probabilité p). Le nombre X de succès suit la **loi binomiale** $B(n; p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

$\binom{n}{k}$ compte les chemins de l'arbre comportant k succès.

Espérance, variance :

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

Complémentaire : $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$; $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$.

Calculatrice : « binomFdp » donne $P(X = k)$, « binomFRép » donne $P(X \leq k)$.

Fréquence $F = \frac{X}{n}$: $E(F) = p$ et $\sigma(F) = \sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}$.

⚠ Des tirages **sans remise** ne sont pas indépendants : la loi n'est pas binomiale (mais elle en est proche si la population est grande).

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une loi binomiale

La loi binomiale exige : épreuves **identiques, indépendantes**, à **deux issues**, en nombre **fixé** n , et X = nombre de succès.

$$X \sim B(n; p)$$

a) Oui : 5 tirages indépendants (avec remise), succès « rouge » de probabilité 0,3 : $X \sim B(5; 0,3)$.

b) **Non** : sans remise, la probabilité de tirer une rouge change d'un tirage à l'autre (les tirages ne sont pas indépendants).

c) **Non** : le nombre de lancers n'est pas fixé à l'avance ; X ne compte pas des succès parmi n épreuves (c'est le rang du premier succès).

— **Rédaction** : à l'écrit, on énonce toujours les conditions du schéma de Bernoulli avant d'écrire $X \sim B(n; p)$.

Réponse. a) $B(5; 0,3)$ · b) non · c) non.

Correction de l'exercice 2 - La loi complète d'une petite binomiale

a) Avec $p = 1 - p = 0,5$, chaque chemin a la probabilité $0,5^4 = \frac{1}{16}$:

$$P(X = k) = \binom{4}{k} \times \frac{1}{16}$$

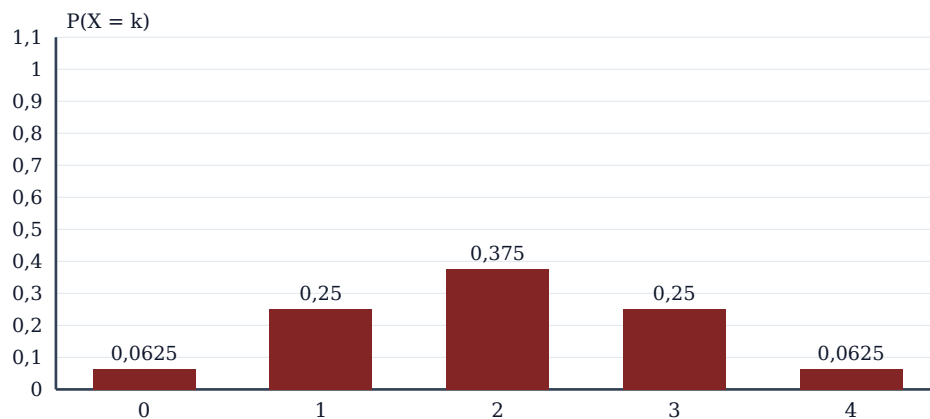
k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

(on reconnaît la ligne 4 du triangle de Pascal).

b) $E(X) = 4 \times 0,5 = 2$ et $V(X) = 4 \times 0,5 \times 0,5 = 1$.

— **Symétrie** : pour $p = 0,5$, la loi est symétrique autour de $\frac{n}{2}$ ✓

Réponse. Loi $\left(\frac{1}{16}; \frac{4}{16}; \frac{6}{16}; \frac{4}{16}; \frac{1}{16}\right)$; $E = 2$, $V = 1$.



Loi binomiale $B(4 ; 0,5)$

Correction de l'exercice 3 - Six lancers de dé

a) 6 lancers identiques et indépendants, chacun avec deux issues (« 6 » de probabilité $\frac{1}{6}$, ou non) : $X \sim B\left(6; \frac{1}{6}\right)$.

b) **Formule** :

$$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,335 \quad P(X = 1) = \binom{6}{1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,402$$

— **Complémentaire** : $P(X \geq 2) = 1 - 0,335 - 0,402 \approx 0,263$.

— **Surprise** : en 6 lancers, on n'obtient pas « forcément » un 6 ; c'est même le cas une fois sur trois.

— **Espérance** : $E(X) = 6 \times \frac{1}{6} = 1$ six en moyenne.

Réponse. $P(X = 0) \approx 0,335$; $P(X = 1) \approx 0,402$; $P(X \geq 2) \approx 0,263$.

Correction de l'exercice 4 - Espérance et écart-type

a) On applique les formules de la loi binomiale :

$$E(X) = np = 50 \times 0,2 = 10 \quad V(X) = np(1 - p) = 50 \times 0,2 \times 0,8 = 8$$

— $\sigma(X) = \sqrt{8} \approx 2,83$.

b) Sur un grand nombre de journées de 50 clients, on vend **en moyenne 10 produits** par jour.

— **Ordre de grandeur de la dispersion** : la plupart des jours, le nombre de ventes sera compris environ entre $10 - 2 \times 2,8 \approx 4$ et $10 + 2 \times 2,8 \approx 16$.

Réponse. $E(X) = 10$; $V(X) = 8$; $\sigma(X) \approx 2,83$.

Correction de l'exercice 5 - Lancers francs

X , le nombre de réussites, suit $B(8; 0,75)$.

a) Calcul :

$$P(X = 8) = 0,75^8 \approx 0,100$$

b) $P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8)$, avec

$$- P(X = 7) = \binom{8}{7} \times 0,75^7 \times 0,25 = 8 \times 0,1335 \times 0,25 \approx 0,267 ;$$

$$- P(X \geq 7) \approx 0,267 + 0,100 = 0,367.$$

— **Interprétation** : un tireur à 75 % ne réussit sa série de 8 qu'une fois sur dix.

— **Espérance** : $8 \times 0,75 = 6$ réussites en moyenne.

Réponse. a) $\approx 0,100$ · b) $\approx 0,367$.

Correction de l'exercice 6 - À la calculatrice

La calculatrice donne la **fonction de répartition** $P(X \leq k)$ (« binomFRép »). On s'y ramène :

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1) \quad P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

$$a) P(X \leq 10) \approx 0,2915.$$

$$b) P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) \approx 1 - 0,8246 = 0,1754.$$

$$c) P(10 < X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X \leq 10) \approx 0,8246 - 0,2915 = 0,5331.$$

— **Contrôle** : $0,2915 + 0,5331 + 0,1754 = 1$ ✓ (les trois intervalles couvrent toutes les valeurs).

— **Piège** : $P(X \geq 15) \neq 1 - P(X \leq 15)$; il faut s'arrêter à 14.

Réponse. a) $\approx 0,292$ · b) $\approx 0,175$ · c) $\approx 0,533$.

Correction de l'exercice 7 - Un seuil de 95 %

On parcourt la table de $P(X \leq k)$ à la calculatrice :

$$- P(X \leq 15) \approx 0,903 ;$$

$$- P(X \leq 16) \approx 0,952.$$

$$k = 16$$

— **Interprétation** : dans 95 % des cas au moins, X ne dépasse pas 16 ; une valeur de 17 ou plus est « rare » (moins de 5 % des cas).

— **Usage** : ce type de seuil sert à définir des **zones de rejet** en statistique — si l'on observe $X \geq 17$, on peut douter de l'hypothèse $p = 0,4$.

Réponse. $k = 16$.

Correction de l'exercice 8 - Un jeu avec trois dés

a) On reçoit $5X$ euros et on a misé 3 € : $G = 5X - 3$.

b) $X \sim B\left(3; \frac{1}{6}\right)$, donc $E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Par **linéarité** :

$$E(G) = 5E(X) - 3 = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$$

Le jeu n'est **pas équitable** : le joueur perd en moyenne 0,50 € par partie.

— **Pour le rendre équitable**, il faudrait recevoir g euros par six avec $\frac{g}{2} = 3$, soit $g = 6$ €.

— **Intérêt** : on n'a pas eu besoin de la loi de G ; l'espérance de X suffit.

Réponse. a) $G = 5X - 3$ · b) $E(G) = -0,5$ € : défavorable.

Correction de l'exercice 9 - Retrouver les paramètres

On écrit les deux formules :

$$np = 6 \quad np(1 - p) = 4,2$$

— En divisant la seconde par la première : $1 - p = \frac{4,2}{6} = 0,7$, donc $p = 0,3$.

— Puis $n = \frac{6}{0,3} = 20$.

$X \sim B(20; 0,3)$.

— **Vérification** : $20 \times 0,3 = 6$ ✓ et $20 \times 0,3 \times 0,7 = 4,2$ ✓

— **Remarque** : pour une binomiale, on a toujours $V(X) < E(X)$ (car $1 - p < 1$).

Réponse. $n = 20$ et $p = 0,3$.

Correction de l'exercice 10 - La fréquence de succès

a) $X \sim B(n; 0,5)$ et $F = \frac{1}{n}X$:

$$E(F) = \frac{1}{n} \times 0,5n = 0,5 \quad V(F) = \frac{1}{n^2} \times 0,25n = \frac{0,25}{n} \quad \sigma(F) = \frac{0,5}{\sqrt{n}}$$

b) - $n = 100$: $\sigma(F) = \frac{0,5}{10} = 0,05$;

— $n = 400$: $\sigma(F) = \frac{0,5}{20} = 0,025$.

Constat : multiplier le nombre de lancers par 4 divise l'écart-type par 2. La fréquence se **concentre** autour de 0,5 quand n augmente, mais lentement (en $\frac{1}{\sqrt{n}}$).

— **Lien** : c'est la base de la **loi des grands nombres** et des intervalles de confiance des sondages.

Réponse. a) $E(F) = 0,5$, $\sigma(F) = \frac{0,5}{\sqrt{n}}$ · b) 0,05 puis 0,025.

Correction de l'exercice 11 - Symétrie de la loi

a) Y compte les **échecs** parmi les n épreuves. Un échec a la probabilité $1 - p$, et les épreuves restent indépendantes : $Y \sim B(n; 1 - p)$.

Par le calcul : $P(Y = k) = P(X = n - k) = \binom{n}{n - k} p^{n - k} (1 - p)^k = \binom{n}{k} (1 - p)^k p^{n - k}$, qui est bien la formule de $B(n; 1 - p)$ (symétrie des coefficients binomiaux).

b) Si $p = \frac{1}{2}$, alors $1 - p = p$: X et $n - X$ ont la **même loi**, donc

$$P(X = k) = P(X = n - k)$$

— **Graphiquement** : le diagramme de $B\left(n; \frac{1}{2}\right)$ est symétrique par rapport à $\frac{n}{2}$.

Réponse. Y compte les échecs : $Y \sim B(n; 1 - p)$; symétrie pour $p = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 12 - Un effet secondaire rare

a) 1 000 patients, réactions indépendantes, chacun présente l'effet avec la probabilité 0,002 : $X \sim B(1\,000; 0,002)$.

b) **Aucun cas** :

$$P(X = 0) = 0,998^{1\,000} \approx 0,135$$

— $P(X \geq 1) \approx 1 - 0,135 = 0,865$.

— $E(X) = 1\,000 \times 0,002 = 2$ cas en moyenne.

— **Interprétation** : même un effet « rare » a 86 % de chances d'apparaître au moins une fois sur 1 000 patients. C'est pourquoi les essais cliniques portent sur de grands effectifs.

Réponse. a) $B(1\,000; 0,002)$ · b) $\approx 0,135$; $\approx 0,865$; $E(X) = 2$.

Correction de l'exercice 13 - La surréservation

a) 52 passagers indépendants, chacun présent avec la probabilité 0,9 : $X \sim B(52; 0,9)$.

b) Il y a un problème si plus de 50 passagers se présentent :

$$P(X \geq 51) = P(X = 51) + P(X = 52) = \binom{52}{51} 0,9^{51} \times 0,1 + 0,9^{52}$$

— À la calculatrice : $P(X = 51) \approx 0,0243$ et $P(X = 52) \approx 0,0042$, soit $P(X \geq 51) \approx 0,028$.

— **Interprétation** : dans moins de 3 % des vols, des passagers seront refusés ; en contrepartie, la compagnie évite de voler avec des sièges vides (en moyenne $E(X) = 46,8$ passagers se présentent).

Réponse. a) $B(52; 0,9)$ · b) $\approx 0,028$.

Correction de l'exercice 14 - Un prétendu voyant

a) Si elle répond au hasard, chaque réponse est juste avec la probabilité 0,5, indépendamment : $X \sim B(10; 0,5)$.

b) Avec $P(X = k) = \frac{\binom{10}{k}}{1\,024}$:

$$P(X \geq 8) = \frac{\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}}{1\,024} = \frac{45 + 10 + 1}{1\,024} = \frac{56}{1\,024} \approx 0,055$$

— Environ 5,5 % des personnes répondant au hasard obtiendraient un tel score : c'est **peu probable**, mais pas exceptionnel. Si l'on teste 20 « voyants », il est normal que l'un d'eux réussisse.

— **Démarche scientifique** : pour conclure, il faudrait un test plus long (100 cartes, par exemple), où le hasard ne peut plus produire un score élevé.

Réponse. a) $B(10; 0,5)$ · b) $\frac{56}{1\,024} \approx 0,055$: pas convaincant.

Correction de l'exercice 15 - Avec ou sans remise dans une grande urne

a) **Sans remise**, à chaque tirage il reste une boule de moins :

$$P = \frac{900}{1\,000} \times \frac{899}{999} \times \frac{898}{998} \times \frac{897}{997} \times \frac{896}{996} \approx 0,5898$$

b) **Modèle binomial** (comme avec remise) : $P(X = 0) = 0,9^5 = 0,59049$.

- L'écart n'est que d'environ 0,000 7 : le modèle binomial est une **excellente approximation**.
- **Pourquoi** : retirer 5 boules sur 1 000 modifie à peine la proportion de rouges ; les tirages sont « presque » indépendants.
- **Règle pratique** : on assimile un tirage sans remise à un tirage avec remise quand l'échantillon est petit devant la population — c'est ce qu'on fait dans les sondages.

Réponse. a) $\approx 0,5898$ · b) 0,5905 : approximation excellente.