

Plaquette 1 - Loi de probabilité et espérance

Variables aléatoires (lois) — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Loi de probabilité. Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$, sa loi est la donnée des $p_i = P(X = x_i)$, avec

$$p_i \geq 0 \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Interprétation : moyenne des valeurs de X sur un grand nombre de répétitions (loi des grands nombres).

Jeu équitable : l'espérance du gain **net** est nulle ; si elle est positive, le jeu est favorable au joueur.

Linéarité : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Symétrie : si la loi est symétrique par rapport à une valeur m , alors $E(X) = m$.

Équiprobabilité : $P(X = x) = \frac{\text{nombre d'issues donnant } x}{\text{nombre total d'issues}}$.

Correction de l'exercice 1 - La roue de la fête foraine

a) Les secteurs sont équiprobables ($\frac{1}{8}$ chacun) :

x_i	0	2	10
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(somme $\frac{4+3+1}{8} = 1$ ✓).

b) **Espérance :**

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{8} + 10 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8} + \frac{10}{8} = 2$$

— **Interprétation :** sur un grand nombre de tours, le joueur gagne en moyenne 2 € par tour. Si le tour coûte plus de 2 €, le jeu est défavorable au joueur.

Réponse. $E(X) = 2$ € par tour en moyenne.

Correction de l'exercice 2 - Deux pièces

a) Les 4 issues PP, PF, FP, FF sont équiprobables :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

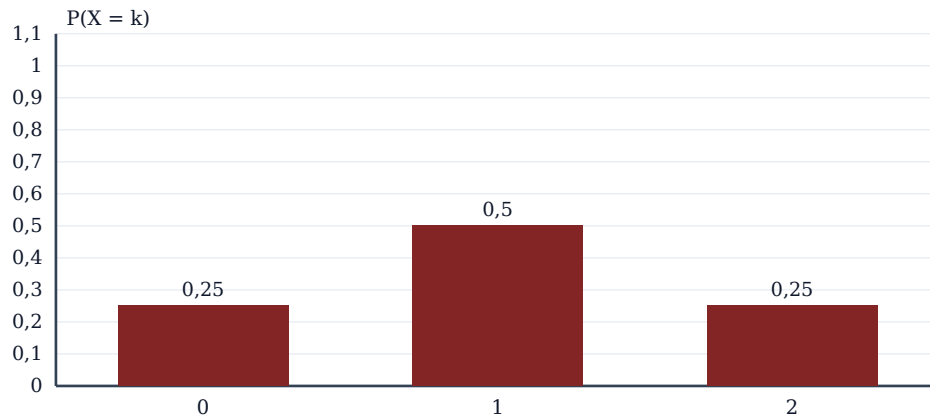
(on obtient un seul « pile » avec PF **ou** FP , d'où $\frac{2}{4}$).

b) Calcul :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

- **Cohérence** : chaque pièce donne « pile » une fois sur deux, donc en moyenne un « pile » sur deux pièces.
- **Symétrie** : la loi est symétrique autour de 1, ce qui donnait directement $E(X) = 1$.

Réponse. Loi $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; $E(X) = 1$.



Loi du nombre de « pile »

Correction de l'exercice 3 - Une probabilité manquante

a) La somme des probabilités vaut 1 :

$$0,1 + 0,35 + p + 0,15 = 1 \Leftrightarrow p = 0,4$$

b) Calcul :

$$E(X) = -1 \times 0,1 + 0 \times 0,35 + 2 \times 0,4 + 5 \times 0,15 = -0,1 + 0 + 0,8 + 0,75 = 1,45$$

— **Contrôle** : $E(X)$ est bien compris entre la plus petite valeur (-1) et la plus grande (5)
✓

— **Remarque** : l'espérance n'est pas forcément une valeur prise par X .

Réponse. a) $p = 0,4$ · b) $E(X) = 1,45$.

Correction de l'exercice 4 - Tirage simultané

Il y a $\binom{5}{2} = 10$ tirages équiprobables.

a) On compte les tirages favorables à chaque valeur :

- $X = 0$: 2 blanches, $\binom{2}{2} = 1$ tirage ;
- $X = 1$: $\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 6$ tirages ;
- $X = 2$: $\binom{3}{2} = 3$ tirages.

k	0	1	2
P(X = k)	0,1	0,6	0,3

b) Calcul :

$$E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,6 + 2 \times 0,3 = 1,2$$

- **Interprétation** : $\frac{3}{5}$ des boules sont rouges ; en tirant 2 boules, on en obtient en moyenne $2 \times \frac{3}{5} = 1,2$ ✓

Réponse. Loi $(0,1 ; 0,6 ; 0,3)$; $E(X) = 1,2$.

Correction de l'exercice 5 - Gain net d'un jeu

a) On retire la mise de 3 € à chaque somme reçue :

g	12	2	-3
$P(G = g)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

b) **Espérance** :

$$E(G) = 12 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} - 3 \times \frac{4}{6} = \frac{12 + 2 - 12}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

$E(G) > 0$: le jeu est **favorable** au joueur, qui gagne en moyenne environ 0,33 € par partie.

- **Piège** : oublier de retirer la mise et calculer l'espérance de la somme reçue, $\frac{15 + 5}{6} \approx 3,33$ €.

Réponse. $E(G) = \frac{1}{3}$ € : jeu favorable.

Correction de l'exercice 6 - Lire des probabilités dans une loi

On additionne les probabilités des valeurs concernées (événements incompatibles) :

$$P(X \in I) = \sum_{k \in I} P(X = k)$$

- $P(X \leq 1) = 0,05 + 0,2 = 0,25$;
- $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,4$;
- $P(1 \leq X < 4) = 0,2 + 0,35 + 0,3 = 0,85$ (la valeur 4 est exclue).

Espérance : $E(X) = 0 + 0,2 + 0,7 + 0,9 + 0,4 = 2,2$.

- **Piège** : bien distinguer $<$ et $\leq$; pour une variable à valeurs entières, $P(X > 2) = P(X \geq 3)$.

Réponse. 0,25 ; 0,4 ; 0,85 ; $E(X) = 2,2$.

Correction de l'exercice 7 - Espérance par symétrie

a) Lecture : $P(X = 0) = 0,1$, $P(X = 1) = 0,2$, $P(X = 2) = 0,4$, $P(X = 3) = 0,2$, $P(X = 4) = 0,1$ (somme 1 ✓).

b) La loi est **symétrique** par rapport à 2 : les valeurs $2 - k$ et $2 + k$ ont la même probabilité. Donc $E(X) = 2$.

Calcul :

$$E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,2 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,1 = 0,2 + 0,8 + 0,6 + 0,4 = 2$$

- **Pourquoi** : les écarts à 2 se compensent deux à deux (-2 avec $+2$, -1 avec $+1$).

Réponse. $E(X) = 2$ (symétrie).

Correction de l'exercice 8 - Une loi définie par une formule

a) La somme des probabilités vaut 1 :

$$c \times 1 + c \times 2 + c \times 3 + c \times 4 = 10c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{10}$$

La loi est donc $(0,1; 0,2; 0,3; 0,4)$.

b) $E(X) = \frac{1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4}{10} = \frac{30}{10} = 3.$

— $P(X \geq 3) = 0,3 + 0,4 = 0,7.$

— **Interprétation** : les grandes valeurs sont plus probables, donc l'espérance (3) est au-dessus du « milieu » 2,5.

Réponse. a) $c = \frac{1}{10}$ · b) $E(X) = 3, P(X \geq 3) = 0,7.$

Correction de l'exercice 9 - Le rang du premier pile

Les lancers sont indépendants, chacun donne « pile » avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

a) « Premier pile au rang k » = $k - 1$ « face » puis « pile » :

k	1	2	3	0
$P(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

($X = 0$ correspond à « face, face, face »). Somme : $\frac{4 + 2 + 1 + 1}{8} = 1 \checkmark$

b) Calcul :

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{1}{8} = \frac{4 + 2 + 3}{8} = \frac{9}{8} = 1,125$$

Réponse. Loi $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$; $E(X) = \frac{9}{8}$.

Correction de l'exercice 10 - Espérance et moyenne observée

a) Gain moyen : $\frac{2\,037}{1\,000} = 2,037$ € par partie, très proche de $E(X) = 2$.

moyenne observée sur n parties $\rightarrow E(X)$ quand n devient grand

C'est la **loi des grands nombres** : l'espérance est la moyenne « à long terme ».

b) Gain moyen : 3,40 € par partie. Sur seulement 10 parties, les fluctuations sont importantes (un seul secteur à 10 € de plus change beaucoup la moyenne). On **ne peut pas** conclure à une tricherie.

— **Leçon** : l'espérance renseigne sur le comportement moyen après **beaucoup** de répétitions, pas sur quelques parties.

Réponse. a) 2,037 €, proche de 2 · b) non, 10 parties sont trop peu.

Correction de l'exercice 11 - La tombola de la kermesse

a) Gain net = valeur du lot - 2 € ; il y a $200 - 1 - 5 - 20 = 174$ billets perdants :

g	98	18	3	-2
$P(G = g)$	$\frac{1}{200}$	$\frac{5}{200}$	$\frac{20}{200}$	$\frac{174}{200}$

b) **Espérance :**

$$E(G) = \frac{98 + 5 \times 18 + 20 \times 3 - 174 \times 2}{200} = \frac{98 + 90 + 60 - 348}{200} = -\frac{100}{200} = -0,5$$

— Chaque billet fait perdre en moyenne 0,50 € à l'acheteur ; l'organisateur gagne donc $200 \times 0,5 = 100$ €.

— **Vérification** : recettes 400 €, lots $100 + 100 + 100 = 300$ €, bénéfice 100 € ✓

Réponse. $E(G) = -0,5$ € ; bénéfice de l'organisateur : 100 €.

Correction de l'exercice 12 - Changer d'unité

a) Conversion puis frais : $Y = 0,92X + 5$.

b) **Linéarité de l'espérance :**

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

— $E(Y) = 0,92 \times 40 + 5 = 36,8 + 5 = 41,8$ €.

— **Justification** : $E(aX + b) = \sum (ax_i + b)p_i = a \sum x_i p_i + b \sum p_i = aE(X) + b$, car $\sum p_i = 1$.

— **Intérêt** : on obtient l'espérance de Y **sans connaître** la loi de X .

Réponse. a) $Y = 0,92X + 5$ · b) $E(Y) = 41,8$ €.

Correction de l'exercice 13 - Comparer deux jeuxa) **Espérances :**

$$E(G_A) = 10 \times 0,3 - 3 \times 0,7 = 3 - 2,1 = 0,9 \quad E(G_B) = 50 \times 0,05 - 1 \times 0,95 = 1,55$$

b) **Joueur régulier** : le gain moyen se rapproche de l'espérance ; le jeu B rapporte davantage en moyenne (1,55 € contre 0,9 € par partie).

Une seule partie : avec B , on perd 1 € dans 95 % des cas ; avec A , on gagne dans 30 % des cas. Le jeu B est bien plus **risqué**.

— **Leçon** : l'espérance ne mesure pas le risque ; il faudra un indicateur de **dispersion** (la variance) pour comparer les deux jeux.

Réponse. $E(G_A) = 0,9$ € ; $E(G_B) = 1,55$ € ; B à long terme, mais plus risqué.

Correction de l'exercice 14 - L'écart entre deux dés

On compte les couples (sur 36) pour chaque écart :

- $D = 0$: les 6 doubles ;
- $D = 1$: (1, 2), (2, 3), ..., (5, 6) et leurs symétriques, soit 10 ;
- $D = 2$: 8 ; $D = 3$: 6 ; $D = 4$: 4 ; $D = 5$: 2.

d	0	1	2	3	4	5
$P(D = d)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

(somme $\frac{36}{36}$ ✓).

b) Calcul :

$$E(D) = \frac{0 + 10 + 16 + 18 + 16 + 10}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18} \approx 1,94$$

Réponse. $E(D) = \frac{35}{18} \approx 1,94$.

Correction de l'exercice 15 – Rendre un jeu équitable

a) Le gain X vaut g avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et -1 avec la probabilité $\frac{5}{6}$:

$$E(X) = \frac{g}{6} - \frac{5}{6} = \frac{g-5}{6}$$

b) Le jeu est **équitable** si $E(X) = 0$, soit $g = 5$ €.

— Si $g > 5$, le jeu est favorable au joueur ; si $g < 5$, à l'organisateur.

— **Interprétation** : sur 6 parties « moyennes », on gagne une fois 5 € et on perd cinq fois 1 € : le bilan est nul.

Réponse. a) $E(X) = \frac{g-5}{6}$. b) $g = 5$ €.