

Plaquette 4 - Sommes de variables — type bac

Variables aléatoires (lois) — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Linéarité de l'espérance (toujours vraie) :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Variance d'une somme (si X et Y sont **indépendantes**) :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \quad V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$$

△ Les **écarts-types ne s'additionnent pas** : $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$.

Somme de n variables indépendantes de même loi (espérance μ , variance σ^2) :

$$E(S_n) = n\mu \quad V(S_n) = n\sigma^2 \quad \sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$$

Moyenne $M_n = \frac{S_n}{n}$: $E(M_n) = \mu$ et $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Loi binomiale : si $X_1, \dots, X_n$ sont des Bernoulli indépendantes de paramètre p , $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim B(n; p)$, d'où $E = np$ et $V = np(1 - p)$.

Correction de l'exercice 1 - La somme de trois dés

On écrit $S = X_1 + X_2 + X_3$, où X_i est le résultat du i -ème dé.

Espérance (linéarité, toujours vraie) :

$$E(S) = 3 \times 3,5 = 10,5$$

Variance : les trois dés sont **indépendants**, donc les variances s'additionnent :

$$- V(S) = 3 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{4} = 8,75 ;$$

$$- \sigma(S) = \sqrt{8,75} \approx 2,96.$$

— **Intérêt** : la loi de S comporte 16 valeurs (3 à 18) et demanderait de dénombrer 216 issues ; les propriétés de la somme donnent E et V en deux lignes.

Réponse. $E(S) = 10,5$; $V(S) = 8,75$; $\sigma(S) \approx 2,96$.

Correction de l'exercice 2 - Combiner deux gains

Espérances par linéarité, **variances** par indépendance :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$$

$$a) E = 2 - 1 = 1 ; V = 1 + 4 = 5.$$

$$b) E = 4 + 1 = 5 ; V = 4 \times 1 + 1 \times 4 = 8.$$

$$c) E = 2 + 1 = 3 ; V = 1 + 4 = 5.$$

— **Piège en c)** : la variance d'une **différence** est la **somme** des variances ($(-1)^2 = 1$) ; soustraire deux quantités aléatoires ajoute leurs incertitudes, cela ne les annule pas.

Réponse. a) 1 ; 5 · b) 5 ; 8 · c) 3 ; 5.

Correction de l'exercice 3 - Espérance et variance de la loi binomiale

a) Chaque X_i suit une loi de **Bernoulli** de paramètre p :

$$E(X_i) = p \quad V(X_i) = p(1 - p)$$

b) **Espérance** par linéarité : $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$.

Variance : les épreuves sont **indépendantes**, donc les X_i aussi, et

— $V(X) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = np(1 - p)$.

— **Intérêt** : cette démonstration évite tout calcul avec les coefficients binomiaux.

— **Idée clé** : compter des succès, c'est **additionner des indicatrices** 0 / 1.

Réponse. $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Correction de l'exercice 4 - Chiffre d'affaires d'une journée

$S = X_1 + \dots + X_{100}$, somme de 100 variables indépendantes de même loi :

$$E(S) = 100 \times 30 = 3\,000 \quad V(S) = 100 \times 10^2 = 10\,000$$

— $\sigma(S) = \sqrt{10\,000} = 100$ €.

— **Interprétation** : le chiffre d'affaires est d'environ 3 000 €, avec un écart-type de seulement 100 € (3 %), alors que chaque dépense individuelle varie de ± 33 %. Les écarts individuels se **compensent** en partie.

— **Piège** : additionner les écarts-types donnerait 1 000 €, dix fois trop.

Réponse. $E(S) = 3\,000$ € ; $\sigma(S) = 100$ €.

Correction de l'exercice 5 - La moyenne de plusieurs lancers

$M = \frac{S}{25}$ où S est la somme des 25 résultats indépendants. D'où

$$E(M) = \mu = 3,5 \quad \sigma(M) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,708}{5} \approx 0,342$$

b) Avec $n = 100$: $E(M) = 3,5$ et $\sigma(M) = \frac{1,708}{10} \approx 0,171$.

— **Interprétation** : la moyenne des lancers a toujours pour espérance 3,5, mais elle se **concentre** autour de cette valeur quand n augmente ; son écart-type diminue comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

— **Coût de la précision** : pour diviser l'écart-type par 2, il faut **quatre fois** plus de lancers.

Réponse. a) 3,5 et $\approx 0,342$ · b) 3,5 et $\approx 0,171$.

Correction de l'exercice 6 - Quand l'indépendance manque

a) $X + X = 2X$, et la variance d'une transformation affine donne

$$V(2X) = 2^2 \times V(X) = 4 \times 3 = 12$$

b) La formule $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ exige que X et Y soient **indépendantes**. Or X n'est pas indépendante d'elle-même : c'est le cas extrême de dépendance.

— **Comparaison** : si X_1 et X_2 sont deux variables **indépendantes** de même loi que X , alors $V(X_1 + X_2) = 6$; les deux écarts se compensent en partie, ce qui n'arrive pas quand on double une même valeur.

- **Leçon** : l'espérance d'une somme se calcule toujours terme à terme ; la variance, **seulement** avec l'indépendance.

Réponse. a) 12 · b) X et X ne sont pas indépendantes.

Correction de l'exercice 7 - Temps de trajet

Soit $T = T_1 + T_2$. **Espérance** :

$$E(T) = 20 + 35 = 55 \text{ min}$$

Variance (indépendance) : $V(T) = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, donc $\sigma(T) = 5 \text{ min}$.

- **Remarque** : $\sigma(T) = 5$ et non $4 + 3 = 7$; les écarts-types se combinent « comme les côtés d'un triangle rectangle » (théorème de Pythagore).
- **Interprétation** : la durée totale varie moins que la somme des variations, car il est rare que les deux étapes soient **à la fois** longues.

Réponse. $E(T) = 55 \text{ min}$; $\sigma(T) = 5 \text{ min}$.

Correction de l'exercice 8 - Diversifier un placement

Espérance :

$$E(R) = 0,5 \times 5 + 0,5 \times 3 = 4 \%$$

Variance (indépendance) :

- $V(R) = 0,5^2 \times 10^2 + 0,5^2 \times 4^2 = 25 + 4 = 29$, donc $\sigma(R) = \sqrt{29} \approx 5,4 \%$.

Comparaison : par rapport au placement 1 seul, on perd 1 point de rendement moyen (4 % au lieu de 5 %), mais le risque est presque **divisé par deux** (5,4 % au lieu de 10 %).

- **Culture** : c'est le principe de la **diversification** en finance : « ne pas mettre tous ses œufs dans le même panier ».

Réponse. $E(R) = 4 \%$; $\sigma(R) = \sqrt{29} \approx 5,4 \%$.

Correction de l'exercice 9 - Le joueur régulier

a) Somme de 100 variables indépendantes de même loi :

$$E(S) = 100 \times (-0,2) = -20 \quad \sigma(S) = 3\sqrt{100} = 30$$

- Après 100 parties, la perte moyenne (20 €) est **petite** devant l'écart-type (30 €) : le joueur peut très bien être gagnant.

b) Pour 10 000 parties : $E(S) = -2 000 \text{ €}$ et $\sigma(S) = 3 \times 100 = 300 \text{ €}$.

- La perte moyenne est maintenant **grande** devant l'écart-type : le joueur est presque sûr de perdre.
- **Leçon** : l'espérance croît comme n , l'écart-type comme $\sqrt{n}$; à long terme, l'espérance l'emporte — c'est ainsi que les casinos gagnent.

Réponse. a) -20 € et 30 € · b) -2 000 € et 300 €.

Correction de l'exercice 10 - Somme de deux binomiales

a) $X \sim B(30; 0,7)$ et $Y \sim B(20; 0,7)$.

- $E(X + Y) = 21 + 14 = 35$;
- $V(X + Y) = 30 \times 0,7 \times 0,3 + 20 \times 0,7 \times 0,3 = 6,3 + 4,2 = 10,5$ (indépendance).

b) $X + Y$ compte les paiements par carte parmi les 50 clients, tous indépendants avec la même probabilité 0,7 :

$$X + Y \sim B(50; 0,7)$$

- Formules directes : $E = 50 \times 0,7 = 35 \checkmark$ et $V = 50 \times 0,7 \times 0,3 = 10,5 \checkmark$
- **Condition** : ce résultat exige le **même** paramètre p ; avec p différents, la somme n'est pas binomiale.

Réponse. $X + Y \sim B(50; 0,7)$; $E = 35$, $V = 10,5$.

Correction de l'exercice 11 - Le poids d'un carton

La masse totale est $C = X_1 + \dots + X_{12} + 200$.

Espérance :

$$E(C) = 12 \times 250 + 200 = 3\,200 \text{ g}$$

Variance : la constante 200 ne change pas la variance, et les masses sont indépendantes :

- $V(C) = 12 \times 5^2 = 300$, donc $\sigma(C) = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17,3 \text{ g}$.
- **Comparaison** : $12 \times 5 = 60 \text{ g}$ serait l'écart-type si toutes les erreurs allaient dans le même sens ; l'indépendance le réduit à 17,3 g.

Réponse. $E(C) = 3\,200 \text{ g}$; $\sigma(C) \approx 17,3 \text{ g}$.

Correction de l'exercice 12 - La loi d'une somme

a) On liste les couples $(x; y)$, de probabilité $P(X = x) \times P(Y = y)$ par indépendance :

- $S = 0$: $(0; 0)$, probabilité $0,7 \times \frac{1}{3} = \frac{0,7}{3}$;
- $S = 1$: $(0; 1)$ et $(1; 0)$, probabilité $\frac{0,7 + 0,3}{3} = \frac{1}{3}$;
- $S = 2$: $(0; 2)$ et $(1; 1)$, probabilité $\frac{1}{3}$;
- $S = 3$: $(1; 2)$, probabilité $\frac{0,3}{3} = 0,1$.

b) **Avec la loi** : $E(S) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0,3 = 1,3$.

Par linéarité :

$$E(S) = E(X) + E(Y) = 0,3 + 1 = 1,3$$

- **Contrôle** : $\frac{0,7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0,1 = \frac{0,7 + 2}{3} + 0,1 = 0,9 + 0,1 = 1 \checkmark$

Réponse. Loi $\left(\frac{0,7}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0,1\right)$; $E(S) = 1,3$.

Correction de l'exercice 13 - Pénalités dans un QCM

a) X_i vaut 1 avec la probabilité 0,2 et $-0,25$ avec la probabilité 0,8 :

$$E(X_i) = 0,2 - 0,25 \times 0,8 = 0,2 - 0,2 = 0$$

- $E(X_i^2) = 0,2 + 0,0625 \times 0,8 = 0,25$, donc $V(X_i) = 0,25$.

b) Les réponses au hasard sont indépendantes :

- $E(N) = 20 \times 0 = 0$; $V(N) = 20 \times 0,25 = 5$; $\sigma(N) = \sqrt{5} \approx 2,24$.
- **Interprétation** : la pénalité est calculée pour que répondre au hasard rapporte **zéro point en moyenne** ; la note obtenue par pur hasard fluctue autour de 0, avec un écart-type d'environ 2 points.

Réponse. a) $E = 0$, $V = 0,25$ · b) $E(N) = 0$, $\sigma(N) \approx 2,24$.

Correction de l'exercice 14 - La tournée du livreur

a) Il livre X colis ($+2X$) et échoue pour $40 - X$ colis ($-(40 - X)$) :

$$G = 2X - (40 - X) = 3X - 40$$

b) $X \sim B(40; 0,9)$: $E(X) = 36$ et $V(X) = 40 \times 0,9 \times 0,1 = 3,6$.

— **Transformation affine** : $E(G) = 3 \times 36 - 40 = 68$ € ;

— $V(G) = 9 \times 3,6 = 32,4$, donc $\sigma(G) = \sqrt{32,4} \approx 5,69$ €.

— **Interprétation** : le gain d'une tournée est d'environ 68 €, et varie typiquement de ± 6 € d'une tournée à l'autre.

Réponse. $E(G) = 68$ € ; $\sigma(G) \approx 5,69$ €.

Correction de l'exercice 15 - Combien de mesures ?

a) La moyenne de n variables indépendantes de même loi a pour écart-type

$$\sigma(M_n) = \frac{1,7}{\sqrt{n}}$$

b) $\frac{1,7}{\sqrt{n}} \leq 0,1 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 17 \Leftrightarrow n \geq 289$.

— Il faut au moins 289 **mesures**.

— **Interprétation** : gagner un facteur 17 en précision demande $17^2 = 289$ fois plus de mesures qu'une mesure unique. C'est la « loi en racine carrée » : la précision s'améliore lentement.

— **Lien** : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permettra de traduire cet écart-type en une probabilité d'erreur.

Réponse. a) $\sigma(M_n) = \frac{1,7}{\sqrt{n}}$ · b) $n \geq 289$.