Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : loi binomiale, espérance et jeux équitables

Variables aléatoires (lois) — Terminale spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Loi d'une variable aléatoire. Un tableau donnant les $P(X = x_i)$, dont la somme vaut 1.

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \qquad V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Formule de König-Huygens (souvent plus rapide) :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) - (E(X))^2$$

Transformation affine. Pour $Y = aX + b$:

$$E(Y) = aE(X) + b \qquad V(Y) = a^2 V(X) \qquad \sigma(Y) = |a|\,\sigma(X)$$

Loi de Bernoulli de paramètre p : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

Loi binomiale $X \sim B(n\,;p)$ — nombre de succès dans n épreuves **identiques et indépendantes** :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Événements utiles.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n \qquad P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)$$

Jeu équitable : le gain algébrique G vérifie $E(G) = 0$. Si $E(G) > 0$ le jeu est **favorable** au joueur, si $E(G) < 0$ il est **défavorable**.

Linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, **toujours** — même si X et Y ne sont pas indépendantes. En revanche $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ exige l'**indépendance**.

Correction de l'exercice 1 – Loi donnée par un tableau

— **Contrôle préalable** : $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$ ✓

— **Espérance** :

$$E(X) = -2 \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}1 = -0{,}4 + 0 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}3$$

— **Moment d'ordre 2** :

$$E\left(X^2\right) = 4 \times 0{,}2 + 0 + 1 \times 0{,}4 + 9 \times 0{,}1 = 0{,}8 + 0{,}4 + 0{,}9 = 2{,}1$$

— **Variance** (König-Huygens) :

$$V(X) = 2{,}1 - 0{,}3^2 = 2{,}1 - 0{,}09 = 2{,}01$$

— **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{2{,}01} \approx 1{,}418$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle par la définition** : $(-2{,}3)^2 \times 0{,}2 + (-0{,}3)^2 \times 0{,}3 + 0{,}7^2 \times 0{,}4 + 2{,}7^2 \times 0{,}1$
— $= 1{,}058 + 0{,}027 + 0{,}196 + 0{,}729 = 2{,}01$ ✓
— **Lecture** : l'espérance 0,3 est faible alors que l'écart type dépasse 1,4 — la variable est très **dispersée** autour de sa moyenne.

Réponse. $E(X) = 0{,}3$, $V(X) = 2{,}01$, $\sigma(X) \approx 1{,}42$.

Correction de l'exercice 2 – Paramètre inconnu dans une loi

— **Somme des probabilités** : $a + 2a + 0{,}4 = 1$, donc $3a = 0{,}6$ et

$$a = 0{,}2$$

— **Loi complète** : $P(X = 1) = 0{,}2$, $P(X = 2) = 0{,}4$, $P(X = 3) = 0{,}4$.
— **Contrôle** : $0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}4 = 1$ ✓
— **Espérance** :

$$E(X) = 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}4 = 0{,}2 + 0{,}8 + 1{,}2 = 2{,}2$$

— **Cohérence** : 2,2 est bien compris entre 1 et 3, et plutôt proche de 3 puisque les valeurs 2 et 3 concentrent 80 % de la probabilité ✓
— **Variance** : $E\left(X^2\right) = 0{,}2 + 1{,}6 + 3{,}6 = 5{,}4$, donc $V(X) = 5{,}4 - 4{,}84 = 0{,}56$ et $\sigma(X) \approx 0{,}748$.

Réponse. $a = 0{,}2$ et $E(X) = 2{,}2$.

Correction de l'exercice 3 – Coefficients binomiaux

— **Formule** : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \qquad \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$$

— **Symétrie** : choisir 4 éléments à garder revient à choisir les 2 à écarter — d'où l'égalité ✓

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = \frac{720}{6} = 120 \qquad \binom{10}{10} = 1$$

— **Contrôle par le triangle de Pascal** : $\binom{6}{2} = \binom{5}{2} + \binom{5}{1} = 10 + 5 = 15$ ✓
— $\binom{10}{3} = \binom{9}{3} + \binom{9}{2} = 84 + 36 = 120$ ✓
— **Astuce de calcul** : ne jamais développer 10! (3 628 800), mais simplifier d'abord — on ne garde que k facteurs au numérateur.
— **Ordre de grandeur** : $\binom{10}{5} = 252$ est le maximum de la ligne 10 ; les coefficients décroissent de part et d'autre du centre.

Réponse. 15, 15, 120 et 1.

Correction de l'exercice 4 – Loi binomiale : probabilités ponctuelles

— **Aucun succès** :

$$P(X = 0) = 0{,}75^8 \approx 0{,}1001$$

— **Deux succès** :

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0{,}25^2 \times 0{,}75^6 = 28 \times 0{,}0625 \times 0{,}177979 \approx 0{,}3115$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Au moins un** :

$$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}1001 = 0{,}8999$$

— **Contrôles** : $P(X = 1) = 8 \times 0{,}25 \times 0{,}75^{7} = 8 \times 0{,}25 \times 0{,}133484 \approx 0{,}2670$.

— $P(X = 3) = 56 \times 0{,}015625 \times 0{,}75^{5} = 56 \times 0{,}015625 \times 0{,}237305 \approx 0{,}2076$.

— **Somme partielle** : $0{,}1001 + 0{,}2670 + 0{,}3115 + 0{,}2076 \approx 0{,}8862$ pour $X \leq 3$ — plausible puisque $E(X) = 2$ ✓

— **Espérance et écart type** : $E(X) = 8 \times 0{,}25 = 2$ et $\sigma(X) = \sqrt{8 \times 0{,}25 \times 0{,}75} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}225$.

— **Cohérence** : le maximum de probabilité est atteint en $k = 2$, c'est-à-dire à l'espérance — comportement typique de la binomiale ✓

Réponse. $P(X = 0) \approx 0{,}100$, $P(X = 2) \approx 0{,}312$, $P(X \geq 1) \approx 0{,}900$.

Correction de l'exercice 5 – Espérance et variance d'une binomiale

— **Modèle** : $X \sim B(500\,;0{,}03)$ — les prélèvements sont assimilés à 500 épreuves indépendantes.

— **Espérance** :

$$E(X) = 500 \times 0{,}03 = 15$$

— **Variance** :

$$V(X) = 500 \times 0{,}03 \times 0{,}97 = 14{,}55$$

— **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{14{,}55} \approx 3{,}814$.

— **Lecture** : on attend environ 15 pièces défectueuses, avec une fluctuation typique de ±4 pièces.

— **Intervalle usuel** ($E \pm 2\sigma$) : $[15 - 7{,}63\,;15 + 7{,}63] \approx [7{,}4\,;22{,}6]$ — l'immense majorité des lots contiendra entre 7 et 23 pièces défectueuses.

— **Remarque** : $V(X) \approx E(X)$ ici, car p est petit ($0{,}97 \approx 1$) — c'est le régime où la binomiale ressemble à une loi de Poisson.

— **Justification du modèle** : le tirage est en réalité sans remise, mais l'échantillon est très petit devant la production totale, ce qui rend l'approximation légitime.

Réponse. $E(X) = 15$, $V(X) = 14{,}55$, $\sigma(X) \approx 3{,}81$.

Correction de l'exercice 6 – Seuil avec une binomiale

— **Modèle** : $X \sim B(n\,;0{,}25)$, et l'on cherche $P(X \geq 1) > 0{,}99$.

— **Passage au contraire** :

$$1 - 0{,}75^{n} > 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}75^{n} < 0{,}01$$

— **Logarithme** (avec $\ln 0{,}75 < 0$, sens inversé) :

$$n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}75} \approx \frac{-4{,}6052}{-0{,}2877} \approx 16{,}008$$

— **Conclusion** : $n \geq 17$ questions.

— **Vérifications** : $0{,}75^{16} \approx 0{,}010023 > 0{,}01$ — avec 16 questions, $P(X \geq 1) \approx 0{,}98998$, tout juste insuffisant.

— $0{,}75^{17} \approx 0{,}007517 < 0{,}01$, soit $P(X \geq 1) \approx 0{,}99248 > 0{,}99$ ✓

— **Réponse** : **17 questions**.

— **Attention au cas limite** : le seuil 16,008 est à peine au-dessus de 16 — il faut impérativement **vérifier numériquement** les deux valeurs encadrantes, un arrondi hâtif conduirait à répondre 16.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $n = 17$ ($P(X \geq 1) \approx 0{,}9925$).

Correction de l'exercice 7 – Jeu équitable

— **Gain algébrique** G = gain brut − mise :
— $G = 8$ avec la probabilité 0,1 ; $G = 1$ avec la probabilité 0,3 ; $G = -2$ avec la probabilité 0,6.
— **Contrôle** : $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1$ ✓
— **Espérance** :

$$E(G) = 8 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}3 - 2 \times 0{,}6 = 0{,}8 + 0{,}3 - 1{,}2 = -0{,}1$$

— **Conclusion** : $E(G) = -0{,}1 < 0$, le jeu est **défavorable** au joueur — il perd en moyenne 10 centimes par partie.
— **Contrôle par le gain brut** : $E(\text{brut}) = 10 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}3 = 1 + 0{,}9 = 1{,}9$ € pour une mise de 2 €, soit −0,1 € ✓
— **Mise d'équité** : le jeu serait équitable avec une mise de 1,90 €.
— **Sur 100 parties** : perte moyenne de 10 € — l'organisateur prélève 5 % des mises.
— **Variance** : $E\left(G^2\right) = 64 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}6 = 6{,}4 + 0{,}3 + 2{,}4 = 9{,}1$, donc $V(G) = 9{,}1 - 0{,}01 = 9{,}09$ et $\sigma(G) \approx 3{,}015$ — la fluctuation dépasse largement l'espérance, ce qui explique l'illusion de gain à court terme.

Réponse. Non : $E(G) = -0{,}1$ € (mise d'équité 1,90 €).

Correction de l'exercice 8 – Détermination d'une mise

— **Probabilités** : somme 7 → $\frac{6}{36}$; somme 6 → $\frac{5}{36}$; somme 8 → $\frac{5}{36}$.
— **Donc** $P(6 \text{ ou } 8) = \frac{10}{36}$.
— **Gain brut moyen** :

$$E(\text{brut}) = 12 \times \frac{6}{36} + 6 \times \frac{10}{36} = \frac{72 + 60}{36} = \frac{132}{36} = \frac{11}{3} \approx 3{,}667$$

— **Mise d'équité** : $\frac{11}{3} \approx 3{,}67$ €.
— **Vérification** : avec cette mise, $E(G) = \frac{11}{3} - \frac{11}{3} = 0$ ✓
— **Contrôle des probabilités** : les sommes gagnantes couvrent $\frac{16}{36} \approx 44{,}4\,\%$ des cas — le joueur perd donc plus d'une fois sur deux, mais les gains compensent.
— **Avec une mise de 4 €** : $E(G) = \frac{11}{3} - 4 = -\frac{1}{3} \approx -0{,}33$ € — le jeu devient défavorable.
— **Rappel utile** : la somme 7 est la plus probable de toutes ($\frac{1}{6}$), les sommes 6 et 8 viennent juste après ($\frac{5}{36}$ chacune).

Réponse. Mise de $\frac{11}{3} \approx 3{,}67$ €.

Correction de l'exercice 9 – Transformation affine

— **Loi de** X : $E(X) = 20 \times 0{,}4 = 8$ et $V(X) = 20 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 4{,}8$.
— **Espérance de** Y :

$$E(Y) = 5 \times 8 - 10 = 30$$

— **Variance de** Y :

$$V(Y) = 5^2 \times 4{,}8 = 25 \times 4{,}8 = 120$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Écart type** : $\sigma(Y) = \sqrt{120} \approx 10{,}954$.
— **Contrôle** : $\sigma(X) = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}191$, et $5 \times 2{,}191 \approx 10{,}954$ ✓ — l'écart type se multiplie par $|a|$, pas par a^2.
— **Piège classique** : la soustraction de 10 **décale** l'espérance mais ne change **rien** à la variance — une translation ne modifie pas la dispersion.
— **Vérification avec un signe négatif** : si $Y = -5X + 10$, on aurait $E(Y) = -30$ mais toujours $V(Y) = 120$ et $\sigma(Y) \approx 10{,}954$, car $(-5)^2 = 25$.

Réponse. $E(Y) = 30$, $V(Y) = 120$, $\sigma(Y) \approx 10{,}95$.

Correction de l'exercice 10 – Somme de deux dés

— **Décomposition** : $S = X_1 + X_2$, où chaque X_i est le résultat d'un dé.
— **Espérance d'un dé** : $E(X_1) = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = \dfrac{21}{6} = 3{,}5$.
— **Linéarité** :

$$E(S) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$$

— **Variance d'un dé** : $E\left(X_1^2\right) = \dfrac{1+4+9+16+25+36}{6} = \dfrac{91}{6} \approx 15{,}1667$.
— $V(X_1) = \dfrac{91}{6} - 3{,}5^2 \approx 15{,}1667 - 12{,}25 = 2{,}9167$ (soit $\dfrac{35}{12}$).
— **Indépendance des dés** → les variances s'ajoutent :

$$V(S) = 2 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{6} \approx 5{,}8333$$

— **Écart type** : $\sigma(S) = \sqrt{5{,}8333} \approx 2{,}415$.
— **Contrôle direct** : $E\left(S^2\right) = \sum s^2 P(S = s)$ vaut $\dfrac{1974}{36} \approx 54{,}8333$, et $54{,}8333 - 49 = 5{,}8333$ ✓
— **Cohérence** : $E(S) = 7$ est bien la valeur centrale (et la plus probable) du tableau des sommes ✓
— **Mise en garde** : l'additivité des variances exige l'**indépendance** — elle tomberait en défaut si le second dé dépendait du premier.

Réponse. $E(S) = 7$ et $V(S) = \dfrac{35}{6} \approx 5{,}83$.

Correction de l'exercice 11 – Contrôle de qualité

— **Modèle** : $X \sim B(20\,;0{,}05)$, et l'on cherche $P(X \leq 1)$.
— **Aucune défectueuse** : $0{,}95^{20} \approx 0{,}3585$.
— **Exactement une** : $20 \times 0{,}05 \times 0{,}95^{19} = 1 \times 0{,}377354 \approx 0{,}3774$.
— **Somme** :

$$P(X \leq 1) \approx 0{,}3585 + 0{,}3774 = 0{,}7358$$

— **Réponse** : environ 73,6 % des lots conformes sont acceptés.
— **Détail du calcul** : $20 \times 0{,}05 = 1$ exactement, donc $P(X = 1) = 0{,}95^{19} \approx 0{,}37735$ — une simplification élégante.
— **Contrôle** : $P(X = 2) = 190 \times 0{,}0025 \times 0{,}95^{18} = 0{,}475 \times 0{,}397214 \approx 0{,}1887$, ce qui porte $P(X \leq 2)$ à environ 0,9245.
— **Commentaire industriel** : le critère est **sévère** — plus d'un quart des lots pourtant conformes à 5 % sont rejetés. C'est le « risque du producteur » : 26,4 %.
— **Espérance** : $E(X) = 1$ pièce défectueuse attendue, ce qui explique que le seuil « au plus une » soit si discriminant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $P(X \leq 1) \approx 0{,}736$ (risque du producteur 26,4 %).

Correction de l'exercice 12 – Valeur la plus probable

— **Espérance** : $E(X) = 3$ — le mode est à chercher au voisinage.
— **Calculs** :
— $P(X = 2) = 45 \times 0{,}09 \times 0{,}7^8 = 45 \times 0{,}09 \times 0{,}057648 \approx 0{,}2335$
— $P(X = 3) = 120 \times 0{,}027 \times 0{,}7^7 = 120 \times 0{,}027 \times 0{,}082354 \approx 0{,}2668$
— $P(X = 4) = 210 \times 0{,}0081 \times 0{,}7^6 = 210 \times 0{,}0081 \times 0{,}117649 \approx 0{,}2001$
— **Conclusion** : le maximum est atteint en $k = 3$, avec $P(X = 3) \approx 0{,}267$.
— **Contrôle du rapport** : $\dfrac{P(X=3)}{P(X=2)} \approx 1{,}143 > 1$ (ça monte) et $\dfrac{P(X=4)}{P(X=3)} \approx 0{,}75 < 1$ (ça descend) ✓
— **Règle générale** : le mode d'une binomiale est la partie entière de $(n+1)p$ — ici $11 \times 0{,}3 = 3{,}3$, donc $k = 3$ ✓
— **Encadrement** : $P(X \leq 4) \approx 0{,}8497$ — la loi est nettement **asymétrique** puisque $p < 0{,}5$ tasse la distribution vers la gauche.

Réponse. $k = 3$, avec $P(X = 3) \approx 0{,}267$.

Correction de l'exercice 13 – Comparaison de deux stratégies

— **Par question** : gain $+3$ avec la probabilité 0,25, -1 avec la probabilité 0,75.
— **Espérance par question** :

$$E = 3 \times 0{,}25 - 1 \times 0{,}75 = 0{,}75 - 0{,}75 = 0$$

— **Sur 10 questions** (linéarité) : $E(\text{total}) = 0$.
— **Conclusion** : répondre au hasard n'est **ni avantageux ni désavantageux** en moyenne — le barème est précisément calibré pour neutraliser le hasard.
— **Mais la dispersion change tout** : soit $X \sim B(10\,;0{,}25)$ le nombre de bonnes réponses ; le score est $S = 3X - (10 - X) = 4X - 10$.
— $E(S) = 4 \times 2{,}5 - 10 = 0$ ✓ et $V(S) = 16 \times 10 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 16 \times 1{,}875 = 30$, donc $\sigma(S) \approx 5{,}477$.
— **Lecture stratégique** : l'espérance est nulle mais l'écart type vaut 5,5 points — répondre au hasard est un **pari**, à éviter si l'on veut sécuriser une note, à tenter si l'on doit absolument gagner des points.
— **Probabilité d'un score positif** : il faut $X \geq 3$, soit $1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0{,}5256 = 0{,}4744$ — moins d'une chance sur deux.

Réponse. Espérance nulle : neutre en moyenne, mais $\sigma(S) \approx 5{,}5$ points ($P(S > 0) \approx 0{,}474$).

Correction de l'exercice 14 – Loi d'un maximum

— **Méthode** : $P(M \leq k) = \dfrac{k^2}{36}$, car les deux dés doivent être $\leq k$.
— **Loi** : $P(M = k) = \dfrac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \dfrac{2k-1}{36}$.

$$P(M=1) = \frac{1}{36},\ P(M=2) = \frac{3}{36},\ P(M=3) = \frac{5}{36},\ P(M=4) = \frac{7}{36},\ P(M=5) = \frac{9}{36},\ P(M=6) = \frac{11}{36}$$

— **Contrôle** : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$ ✓
— **Espérance** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$E(M) = \frac{1\times1 + 2\times3 + 3\times5 + 4\times7 + 5\times9 + 6\times11}{36} = \frac{1+6+15+28+45+66}{36} = \frac{161}{36} \approx 4{,}472$$

— **Cohérence** : $E(M) \approx 4{,}47 > 3{,}5$, l'espérance d'un seul dé — logique, le maximum tire la valeur vers le haut ✓

— **Contrôle du cas extrême** : $P(M = 6) = \frac{11}{36} \approx 0{,}306$, ce qui correspond aux 11 couples contenant au moins un 6 ✓

— **Complément** : le minimum m vérifierait $E(m) = 7 - E(M) = \frac{91}{36} \approx 2{,}528$, par symétrie $k \mapsto 7 - k$.

Réponse. $P(M = k) = \frac{2k-1}{36}$ et $E(M) = \frac{161}{36} \approx 4{,}47$.

Correction de l'exercice 15 – Binomiale et intervalle

— **Modèle** : $X \sim B(100\,;0{,}5)$.

— **Espérance** : $E(X) = 100 \times 0{,}5 = 50$.

— **Variance** : $V(X) = 100 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 25$, donc $\sigma(X) = 5$.

— **Intervalle** :

$$[50 - 10\,;50 + 10] = [40\,;60]$$

— **Interprétation** : environ 95 % des séries de 100 lancers donnent entre 40 et 60 piles.

— **Remarque sur la fréquence** : en proportion, cela donne $[0{,}40\,;0{,}60]$ — une amplitude de ±10 points encore large.

— **Effet de la taille d'échantillon** : avec $n = 10\,000$, on aurait $\sigma = 50$ et l'intervalle $[4900\,;5100]$, soit $[0{,}49\,;0{,}51]$ en fréquence — **dix fois** plus resserré pour **cent fois** plus de lancers.

— **Règle à retenir** : σ croît en $\sqrt{n}$, donc la fréquence se resserre en $\frac{1}{\sqrt{n}}$. C'est exactement le contenu de la loi des grands nombres.

— **Contrôle** : $\sigma(X) = \sqrt{25} = 5$, valeur maximale possible pour $n = 100$ puisque $p(1-p)$ est maximal en $p = 0{,}5$ ✓

Réponse. $E(X) = 50$, $\sigma(X) = 5$, intervalle $[40\,;60]$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : assurance

a) **Gain par contrat** : $G = 150$ sans sinistre (probabilité 0,97), $G = 150 - 3000 = -2850$ avec sinistre (probabilité 0,03).

$$E(G) = 150 \times 0{,}97 - 2850 \times 0{,}03 = 145{,}5 - 85{,}5 = 60$$

— L'assureur gagne en moyenne 60 € par contrat.

— **Contrôle** : $150 - 0{,}03 \times 3000 = 150 - 90 = 60$ ✓ — la prime moins le coût moyen du risque.

b) **Écart type** :

$$E\left(G^2\right) = 150^2 \times 0{,}97 + 2850^2 \times 0{,}03 = 21\,825 + 243\,675 = 265\,500$$

$$V(G) = 265\,500 - 3600 = 261\,900 \qquad \sigma(G) = \sqrt{261\,900} \approx 511{,}76$$

— **Commentaire** : l'écart type (512 €) est **huit fois** l'espérance (60 €) — un contrat isolé est très risqué.

c) **Sur** $10\,000$ **contrats indépendants** :

$$E(\text{total}) = 10\,000 \times 60 = 600\,000\ €$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sigma(\text{total}) = \sqrt{10\,000} \times 511{,}76 = 100 \times 511{,}76 \approx 51\,176\ €$$

— **Bénéfice espéré** : 600 000 €, avec une fluctuation typique de ±51 000 € environ.

— **Ratio risque/gain** : $\dfrac{51\,176}{600\,000} \approx 8{,}5\,\%$, contre $\dfrac{512}{60} \approx 853\,\%$ pour un seul contrat.

— **Conclusion** : c'est le principe même de la **mutualisation** — l'espérance croît en n tandis que l'écart type ne croît qu'en $\sqrt{n}$, si bien que le risque relatif s'effondre. Avec 10 000 contrats, une perte est pratiquement exclue (il faudrait s'écarter de près de 12σ).

Réponse. a) 60 € · b) $\sigma(G) \approx 512$ € · c) 600 000 € à ±51 000 € près.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).