

**Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : loi  
binomiale, espérance et jeux équitables**  
**Variables aléatoires (lois) — Terminale spé maths**  
Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Loi d'une variable aléatoire.** Un tableau donnant les  $P(X = x_i)$ , dont la somme vaut 1.

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \quad V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

**Formule de König-Huygens** (souvent plus rapide) :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) - (E(X))^2$$

**Transformation affine.** Pour  $Y = aX + b$  :

$$E(Y) = aE(X) + b \quad V(Y) = a^2 V(X) \quad \sigma(Y) = |a| \sigma(X)$$

**Loi de Bernoulli** de paramètre  $p$  :  $E(X) = p$  et  $V(X) = p(1 - p)$ .

**Loi binomiale**  $X \sim B(n; p)$  — nombre de succès dans  $n$  épreuves **identiques et indépendantes** :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

**Événements utiles.**

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n \quad P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k P(X = i)$$

**Jeu équitable** : le gain algébrique  $G$  vérifie  $E(G) = 0$ . Si  $E(G) > 0$  le jeu est **favorable** au joueur, si  $E(G) < 0$  il est **défavorable**.

**Linéarité de l'espérance** :  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ , **toujours** — même si  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes. En revanche  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$  exige l'**indépendance**.

**Correction de l'exercice 1 - Loi donnée par un tableau**

— **Contrôle préalable** :  $0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,1 = 1 \checkmark$

— **Espérance** :

$$E(X) = -2 \times 0,2 + 0 \times 0,3 + 1 \times 0,4 + 3 \times 0,1 = -0,4 + 0 + 0,4 + 0,3 = 0,3$$

— **Moment d'ordre 2** :

$$E(X^2) = 4 \times 0,2 + 0 + 1 \times 0,4 + 9 \times 0,1 = 0,8 + 0,4 + 0,9 = 2,1$$

— **Variance** (König-Huygens) :

$$V(X) = 2,1 - 0,3^2 = 2,1 - 0,09 = 2,01$$

— **Écart type** :  $\sigma(X) = \sqrt{2,01} \approx 1,418$ .

- **Contrôle par la définition** :  $(-2,3)^2 \times 0,2 + (-0,3)^2 \times 0,3 + 0,7^2 \times 0,4 + 2,7^2 \times 0,1$
- $= 1,058 + 0,027 + 0,196 + 0,729 = 2,01 \checkmark$
- **Lecture** : l'espérance 0,3 est faible alors que l'écart type dépasse 1,4 — la variable est très **dispersée** autour de sa moyenne.

**Réponse.**  $E(X) = 0,3$ ,  $V(X) = 2,01$ ,  $\sigma(X) \approx 1,42$ .

### Correction de l'exercice 2 - Paramètre inconnu dans une loi

- **Somme des probabilités** :  $a + 2a + 0,4 = 1$ , donc  $3a = 0,6$  et  

$$a = 0,2$$
- **Loi complète** :  $P(X = 1) = 0,2$ ,  $P(X = 2) = 0,4$ ,  $P(X = 3) = 0,4$ .
- **Contrôle** :  $0,2 + 0,4 + 0,4 = 1 \checkmark$
- **Espérance** :  

$$E(X) = 1 \times 0,2 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,4 = 0,2 + 0,8 + 1,2 = 2,2$$
- **Cohérence** : 2,2 est bien compris entre 1 et 3, et plutôt proche de 3 puisque les valeurs 2 et 3 concentrent 80 % de la probabilité  $\checkmark$
- **Variance** :  $E(X^2) = 0,2 + 1,6 + 3,6 = 5,4$ , donc  $V(X) = 5,4 - 4,84 = 0,56$  et  
 $\sigma(X) \approx 0,748$ .

**Réponse.**  $a = 0,2$  et  $E(X) = 2,2$ .

### Correction de l'exercice 3 - Coefficients binomiaux

- **Formule** :  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .  

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \quad \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$$
- **Symétrie** : choisir 4 éléments à garder revient à choisir les 2 à écarter — d'où l'égalité  $\checkmark$   

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = \frac{720}{6} = 120 \quad \binom{10}{10} = 1$$
- **Contrôle par le triangle de Pascal** :  $\binom{6}{2} = \binom{5}{2} + \binom{5}{1} = 10 + 5 = 15 \checkmark$
- $\binom{10}{3} = \binom{9}{3} + \binom{9}{2} = 84 + 36 = 120 \checkmark$
- **Astuce de calcul** : ne jamais développer 10! (3 628 800), mais simplifier d'abord — on ne garde que  $k$  facteurs au numérateur.
- **Ordre de grandeur** :  $\binom{10}{5} = 252$  est le maximum de la ligne 10 ; les coefficients décroissent de part et d'autre du centre.

**Réponse.** 15, 15, 120 et 1.

### Correction de l'exercice 4 - Loi binomiale : probabilités ponctuelles

- **Aucun succès** :

$$P(X = 0) = 0,75^8 \approx 0,1001$$

- **Deux succès** :

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,25^2 \times 0,75^6 = 28 \times 0,0625 \times 0,177979 \approx 0,3115$$

— **Au moins un :**

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,1001 = 0,8999$$

- **Contrôles :**  $P(X = 1) = 8 \times 0,25 \times 0,75^7 = 8 \times 0,25 \times 0,133484 \approx 0,2670$ .
- $P(X = 3) = 56 \times 0,015625 \times 0,75^5 = 56 \times 0,015625 \times 0,237305 \approx 0,2076$ .
- **Somme partielle :**  $0,1001 + 0,2670 + 0,3115 + 0,2076 \approx 0,8862$  pour  $X \leq 3$  — plausible puisque  $E(X) = 2$  ✓
- **Espérance et écart type :**  $E(X) = 8 \times 0,25 = 2$  et  $\sigma(X) = \sqrt{8 \times 0,25 \times 0,75} = \sqrt{1,5} \approx 1,225$ .
- **Cohérence :** le maximum de probabilité est atteint en  $k = 2$ , c'est-à-dire à l'espérance — comportement typique de la binomiale ✓

**Réponse.**  $P(X = 0) \approx 0,100$ ,  $P(X = 2) \approx 0,312$ ,  $P(X \geq 1) \approx 0,900$ .

### Correction de l'exercice 5 - Espérance et variance d'une binomiale

- **Modèle :**  $X \sim B(500; 0,03)$  — les prélèvements sont assimilés à 500 épreuves indépendantes.
- **Espérance :**

$$E(X) = 500 \times 0,03 = 15$$

— **Variance :**

$$V(X) = 500 \times 0,03 \times 0,97 = 14,55$$

- **Écart type :**  $\sigma(X) = \sqrt{14,55} \approx 3,814$ .
- **Lecture :** on attend environ 15 pièces défectueuses, avec une fluctuation typique de  $\pm 4$  pièces.
- **Intervalle usuel** ( $E \pm 2\sigma$ ) :  $[15 - 7,63; 15 + 7,63] \approx [7,4; 22,6]$  — l'immense majorité des lots contiendra entre 7 et 23 pièces défectueuses.
- **Remarque :**  $V(X) \approx E(X)$  ici, car  $p$  est petit ( $0,97 \approx 1$ ) — c'est le régime où la binomiale ressemble à une loi de Poisson.
- **Justification du modèle :** le tirage est en réalité sans remise, mais l'échantillon est très petit devant la production totale, ce qui rend l'approximation légitime.

**Réponse.**  $E(X) = 15$ ,  $V(X) = 14,55$ ,  $\sigma(X) \approx 3,81$ .

### Correction de l'exercice 6 - Seuil avec une binomiale

- **Modèle :**  $X \sim B(n; 0,25)$ , et l'on cherche  $P(X \geq 1) > 0,99$ .
- **Passage au contraire :**

$$1 - 0,75^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,75^n < 0,01$$

- **Logarithme** (avec  $\ln 0,75 < 0$ , sens inversé) :

$$n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,75} \approx \frac{-4,6052}{-0,2877} \approx 16,008$$

- **Conclusion :**  $n \geq 17$  questions.
- **Vérifications :**  $0,75^{16} \approx 0,010023 > 0,01$  — avec 16 questions,  $P(X \geq 1) \approx 0,98998$ , tout juste insuffisant.
- $0,75^{17} \approx 0,007517 < 0,01$ , soit  $P(X \geq 1) \approx 0,99248 > 0,99$  ✓
- **Réponse : 17 questions.**
- **Attention au cas limite :** le seuil 16,008 est à peine au-dessus de 16 — il faut impérativement **vérifier numériquement** les deux valeurs encadrantes, un arrondi hâtif conduirait à répondre 16.

**Réponse.**  $n = 17$  ( $P(X \geq 1) \approx 0,9925$ ).

### Correction de l'exercice 7 - Jeu équitable

- **Gain algébrique**  $G = \text{gain brut} - \text{mise}$  :
- $G = 8$  avec la probabilité 0,1 ;  $G = 1$  avec la probabilité 0,3 ;  $G = -2$  avec la probabilité 0,6.
- **Contrôle** :  $0,1 + 0,3 + 0,6 = 1$  ✓
- **Espérance** :  

$$E(G) = 8 \times 0,1 + 1 \times 0,3 - 2 \times 0,6 = 0,8 + 0,3 - 1,2 = -0,1$$
- **Conclusion** :  $E(G) = -0,1 < 0$ , le jeu est **défavorable** au joueur — il perd en moyenne 10 centimes par partie.
- **Contrôle par le gain brut** :  $E(\text{brut}) = 10 \times 0,1 + 3 \times 0,3 = 1 + 0,9 = 1,9$  € pour une mise de 2 €, soit  $-0,1$  € ✓
- **Mise d'équité** : le jeu serait équitable avec une mise de 1,90 €.
- **Sur 100 parties** : perte moyenne de 10 € — l'organisateur prélève 5 % des mises.
- **Variance** :  $E(G^2) = 64 \times 0,1 + 1 \times 0,3 + 4 \times 0,6 = 6,4 + 0,3 + 2,4 = 9,1$ , donc  
 $V(G) = 9,1 - 0,01 = 9,09$  et  $\sigma(G) \approx 3,015$  — la fluctuation dépasse largement l'espérance, ce qui explique l'illusion de gain à court terme.

**Réponse.** Non :  $E(G) = -0,1$  € (mise d'équité 1,90 €).

### Correction de l'exercice 8 - Détermination d'une mise

- **Probabilités** : somme 7  $\rightarrow \frac{6}{36}$  ; somme 6  $\rightarrow \frac{5}{36}$  ; somme 8  $\rightarrow \frac{5}{36}$ .
- **Donc**  $P(6 \text{ ou } 8) = \frac{10}{36}$ .
- **Gain brut moyen** :  

$$E(\text{brut}) = 12 \times \frac{6}{36} + 6 \times \frac{10}{36} = \frac{72 + 60}{36} = \frac{132}{36} = \frac{11}{3} \approx 3,667$$
- **Mise d'équité** :  $\frac{11}{3} \approx 3,67$  €.
- **Vérification** : avec cette mise,  $E(G) = \frac{11}{3} - \frac{11}{3} = 0$  ✓
- **Contrôle des probabilités** : les sommes gagnantes couvrent  $\frac{16}{36} \approx 44,4\%$  des cas — le joueur perd donc plus d'une fois sur deux, mais les gains compensent.
- **Avec une mise de 4 €** :  $E(G) = \frac{11}{3} - 4 = -\frac{1}{3} \approx -0,33$  € — le jeu devient défavorable.
- **Rappel utile** : la somme 7 est la plus probable de toutes ( $\frac{1}{6}$ ), les sommes 6 et 8 viennent juste après ( $\frac{5}{36}$  chacune).

**Réponse.** Mise de  $\frac{11}{3} \approx 3,67$  €.

### Correction de l'exercice 9 - Transformation affine

- **Loi de X** :  $E(X) = 20 \times 0,4 = 8$  et  $V(X) = 20 \times 0,4 \times 0,6 = 4,8$ .
- **Espérance de Y** :

$$E(Y) = 5 \times 8 - 10 = 30$$

- **Variance de Y** :

$$V(Y) = 5^2 \times 4,8 = 25 \times 4,8 = 120$$

- **Écart type** :  $\sigma(Y) = \sqrt{120} \approx 10,954$ .
- **Contrôle** :  $\sigma(X) = \sqrt{4,8} \approx 2,191$ , et  $5 \times 2,191 \approx 10,954$  ✓ — l'écart type se multiplie par  $|a|$ , pas par  $a^2$ .
- **Piège classique** : la soustraction de 10 **décale** l'espérance mais ne change **rien** à la variance — une translation ne modifie pas la dispersion.
- **Vérification avec un signe négatif** : si  $Y = -5X + 10$ , on aurait  $E(Y) = -30$  mais toujours  $V(Y) = 120$  et  $\sigma(Y) \approx 10,954$ , car  $(-5)^2 = 25$ .

**Réponse.**  $E(Y) = 30$ ,  $V(Y) = 120$ ,  $\sigma(Y) \approx 10,95$ .

### Correction de l'exercice 10 - Somme de deux dés

- **Décomposition** :  $S = X_1 + X_2$ , où chaque  $X_i$  est le résultat d'un dé.

- **Espérance d'un dé** :  $E(X_1) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$ .

- **Linéarité** :

$$E(S) = 3,5 + 3,5 = 7$$

- **Variance d'un dé** :  $E(X_1^2) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} \approx 15,1667$ .

- $V(X_1) = \frac{91}{6} - 3,5^2 = 15,1667 - 12,25 = 2,9167$  (soit  $\frac{35}{12}$ ).

- **Indépendance des dés** → les variances s'ajoutent :

$$V(S) = 2 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{6} \approx 5,8333$$

- **Écart type** :  $\sigma(S) = \sqrt{5,8333} \approx 2,415$ .

- **Contrôle direct** :  $E(S^2) = \sum s^2 P(S=s)$  vaut  $\frac{1974}{36} \approx 54,8333$ , et  $54,8333 - 49 = 5,8333$  ✓

- **Cohérence** :  $E(S) = 7$  est bien la valeur centrale (et la plus probable) du tableau des sommes ✓

- **Mise en garde** : l'additivité des variances exige l'**indépendance** — elle tomberait en défaut si le second dé dépendait du premier.

**Réponse.**  $E(S) = 7$  et  $V(S) = \frac{35}{6} \approx 5,83$ .

### Correction de l'exercice 11 - Contrôle de qualité

- **Modèle** :  $X \sim B(20; 0,05)$ , et l'on cherche  $P(X \leq 1)$ .

- **Aucune défectueuse** :  $0,95^{20} \approx 0,3585$ .

- **Exactement une** :  $20 \times 0,05 \times 0,95^{19} = 1 \times 0,377354 \approx 0,3774$ .

- **Somme** :

$$P(X \leq 1) \approx 0,3585 + 0,3774 = 0,7358$$

- **Réponse** : environ 73,6 % des lots conformes sont acceptés.

- **Détail du calcul** :  $20 \times 0,05 = 1$  exactement, donc  $P(X = 1) = 0,95^{19} \approx 0,37735$  — une simplification élégante.

- **Contrôle** :  $P(X = 2) = 190 \times 0,0025 \times 0,95^{18} = 0,475 \times 0,397214 \approx 0,1887$ , ce qui porte  $P(X \leq 2)$  à environ 0,9245.

- **Commentaire industriel** : le critère est **sévère** — plus d'un quart des lots pourtant conformes à 5 % sont rejetés. C'est le « risque du producteur » : 26,4 %.

- **Espérance** :  $E(X) = 1$  pièce défectueuse attendue, ce qui explique que le seuil « au plus une » soit si discriminant.

**Réponse.**  $P(X \leq 1) \approx 0,736$  (risque du producteur 26,4 %).

### Correction de l'exercice 12 - Valeur la plus probable

- **Espérance** :  $E(X) = 3$  — le mode est à chercher au voisinage.
- **Calculs** :
  - $P(X = 2) = 45 \times 0,09 \times 0,7^8 = 45 \times 0,09 \times 0,057648 \approx 0,2335$
  - $P(X = 3) = 120 \times 0,027 \times 0,7^7 = 120 \times 0,027 \times 0,082354 \approx 0,2668$
  - $P(X = 4) = 210 \times 0,0081 \times 0,7^6 = 210 \times 0,0081 \times 0,117649 \approx 0,2001$
- **Conclusion** : le maximum est atteint en  $k = 3$ , avec  $P(X = 3) \approx 0,267$ .
- **Contrôle du rapport** :  $\frac{P(X = 3)}{P(X = 2)} \approx 1,143 > 1$  (ça monte) et  $\frac{P(X = 4)}{P(X = 3)} \approx 0,75 < 1$  (ça descend) ✓
- **Règle générale** : le mode d'une binomiale est la partie entière de  $(n + 1)p$  — ici  $11 \times 0,3 = 3,3$ , donc  $k = 3$  ✓
- **Encadrement** :  $P(X \leq 4) \approx 0,8497$  — la loi est nettement **asymétrique** puisque  $p < 0,5$  tasse la distribution vers la gauche.

**Réponse.**  $k = 3$ , avec  $P(X = 3) \approx 0,267$ .

### Correction de l'exercice 13 - Comparaison de deux stratégies

- **Par question** : gain +3 avec la probabilité 0,25, -1 avec la probabilité 0,75.
- **Espérance par question** :
 
$$E = 3 \times 0,25 - 1 \times 0,75 = 0,75 - 0,75 = 0$$
- **Sur 10 questions** (linéarité) :  $E(\text{total}) = 0$ .
- **Conclusion** : répondre au hasard n'est **ni avantageux ni désavantageux** en moyenne — le barème est précisément calibré pour neutraliser le hasard.
- **Mais la dispersion change tout** : soit  $X \sim B(10; 0,25)$  le nombre de bonnes réponses ; le score est  $S = 3X - (10 - X) = 4X - 10$ .
- $E(S) = 4 \times 2,5 - 10 = 0$  ✓ et  $V(S) = 16 \times 10 \times 0,25 \times 0,75 = 16 \times 1,875 = 30$ , donc  $\sigma(S) \approx 5,477$ .
- **Lecture stratégique** : l'espérance est nulle mais l'écart type vaut 5,5 points — répondre au hasard est un **pari**, à éviter si l'on veut sécuriser une note, à tenter si l'on doit absolument gagner des points.
- **Probabilité d'un score positif** : il faut  $X \geq 3$ , soit  $1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,5256 = 0,4744$  — moins d'une chance sur deux.

**Réponse.** Espérance nulle : neutre en moyenne, mais  $\sigma(S) \approx 5,5$  points ( $P(S > 0) \approx 0,474$ ).

### Correction de l'exercice 14 - Loi d'un maximum

- **Méthode** :  $P(M \leq k) = \frac{k^2}{36}$ , car les deux dés doivent être  $\leq k$ .
- **Loi** :  $P(M = k) = \frac{k^2 - (k - 1)^2}{36} = \frac{2k - 1}{36}$ .  
 $P(M = 1) = \frac{1}{36}$ ,  $P(M = 2) = \frac{3}{36}$ ,  $P(M = 3) = \frac{5}{36}$ ,  $P(M = 4) = \frac{7}{36}$ ,  $P(M = 5) = \frac{9}{36}$ ,  $P(M = 6) = \frac{11}{36}$
- **Contrôle** :  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$  ✓
- **Espérance** :

$$E(M) = \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11}{36} = \frac{1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66}{36} = \frac{161}{36} \approx 4,472$$

- **Cohérence** :  $E(M) \approx 4,47 > 3,5$ , l'espérance d'un seul dé — logique, le maximum tire la valeur vers le haut ✓
- **Contrôle du cas extrême** :  $P(M = 6) = \frac{11}{36} \approx 0,306$ , ce qui correspond aux 11 couples contenant au moins un 6 ✓
- **Complément** : le minimum  $m$  vérifierait  $E(m) = 7 - E(M) = \frac{91}{36} \approx 2,528$ , par symétrie  $k \mapsto 7 - k$ .

**Réponse.**  $P(M = k) = \frac{2k-1}{36}$  et  $E(M) = \frac{161}{36} \approx 4,47$ .

### Correction de l'exercice 15 - Binomiale et intervalle

- **Modèle** :  $X \sim B(100; 0,5)$ .
- **Espérance** :  $E(X) = 100 \times 0,5 = 50$ .
- **Variance** :  $V(X) = 100 \times 0,5 \times 0,5 = 25$ , donc  $\sigma(X) = 5$ .
- **Intervalle** :  

$$[50 - 10; 50 + 10] = [40; 60]$$
- **Interprétation** : environ 95 % des séries de 100 lancers donnent entre 40 et 60 piles.
- **Remarque sur la fréquence** : en proportion, cela donne  $[0,40; 0,60]$  — une amplitude de  $\pm 10$  points encore large.
- **Effet de la taille d'échantillon** : avec  $n = 10\,000$ , on aurait  $\sigma = 50$  et l'intervalle  $[4900; 5100]$ , soit  $[0,49; 0,51]$  en fréquence — **dix fois** plus resserré pour **cent fois** plus de lancers.
- **Règle à retenir** :  $\sigma$  croît en  $\sqrt{n}$ , donc la fréquence se resserre en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . C'est exactement le contenu de la loi des grands nombres.
- **Contrôle** :  $\sigma(X) = \sqrt{25} = 5$ , valeur maximale possible pour  $n = 100$  puisque  $p(1-p)$  est maximal en  $p = 0,5$  ✓

**Réponse.**  $E(X) = 50$ ,  $\sigma(X) = 5$ , intervalle  $[40; 60]$ .

### Correction de l'exercice 16 - Synthèse : assurance

a) **Gain par contrat** :  $G = 150$  sans sinistre (probabilité 0,97),  $G = 150 - 3000 = -2850$  avec sinistre (probabilité 0,03).

$$E(G) = 150 \times 0,97 - 2850 \times 0,03 = 145,5 - 85,5 = 60$$

- L'assureur gagne en moyenne 60 € par contrat.
- **Contrôle** :  $150 - 0,03 \times 3000 = 150 - 90 = 60$  ✓ — la prime moins le coût moyen du risque.

b) **Écart type** :

$$E(G^2) = 150^2 \times 0,97 + 2850^2 \times 0,03 = 21\,825 + 243\,675 = 265\,500$$

$$V(G) = 265\,500 - 3600 = 261\,900 \quad \sigma(G) = \sqrt{261\,900} \approx 511,76$$

- **Commentaire** : l'écart type (512 €) est **huit fois** l'espérance (60 €) — un contrat isolé est très risqué.

c) **Sur 10 000 contrats indépendants** :

$$E(\text{total}) = 10\,000 \times 60 = 600\,000 \text{ €}$$

$$\sigma(\text{total}) = \sqrt{10\,000} \times 511,76 = 100 \times 511,76 \approx 51\,176 \text{ €}$$

- **Bénéfice espéré** : 600 000 €, avec une fluctuation typique de  $\pm 51\,000$  € environ.
- **Ratio risque/gain** :  $\frac{51\,176}{600\,000} \approx 8,5 \%$ , contre  $\frac{512}{60} \approx 853 \%$  pour un seul contrat.
- **Conclusion** : c'est le principe même de la **mutualisation** — l'espérance croît en  $n$  tandis que l'écart type ne croît qu'en  $\sqrt{n}$ , si bien que le risque relatif s'effondre. Avec 10 000 contrats, une perte est pratiquement exclue (il faudrait s'écarter de près de  $12\sigma$ ).

**Réponse.** a) 60 € · b)  $\sigma(G) \approx 512$  € · c) 600 000 € à  $\pm 51\,000$  € près.