

Plaquette 3 - Loi binomiale

Variables aléatoires (lois) — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Avant tout calcul, on **justifie** la loi binomiale : n répétitions **identiques et indépendantes** d'une épreuve à deux issues (succès de probabilité p), et X compte les succès. On calcule ensuite $P(X = k)$ avec la formule, $P(X \leq k)$ ou $P(X \geq k)$ à la calculatrice (ou par le complémentaire), et l'on utilise $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Exercice 1 - Reconnaître une loi binomiale

Dans chaque cas, la variable X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.

- Une urne contient 3 boules rouges et 7 noires ; on tire 5 boules **avec remise** ; X est le nombre de rouges.
- Même urne, 5 tirages **sans remise**.
- On lance un dé jusqu'à obtenir un 6 ; X est le nombre de lancers.

Exercice 2 - La loi complète d'une petite binomiale

Soit $X \sim B(4; 0,5)$.

- Calculer $P(X = k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$ et représenter la loi.
- Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3 - Six lancers de dé

On lance 6 fois un dé équilibré et on note X le nombre de 6 obtenus.

- Justifier que X suit une loi binomiale.
- Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X \geq 2)$.

Exercice 4 - Espérance et écart-type

Soit $X \sim B(50; 0,2)$.

- Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- Interpréter $E(X)$ dans le contexte suivant : X est le nombre de clients, parmi 50, qui achètent un produit proposé, chaque client l'achetant avec la probabilité 0,2.

Exercice 5 - Lancers francs

Un basketteur réussit chaque lancer franc avec la probabilité 0,75, indépendamment. Il en tire 8.

- Quelle est la probabilité qu'il les réussisse tous ?
- Quelle est la probabilité qu'il en réussisse au moins 7 ?

Exercice 6 - À la calculatrice

Soit $X \sim B(30; 0,4)$. À l'aide de la calculatrice, déterminer :

- a) $P(X \leq 10)$
- b) $P(X \geq 15)$
- c) $P(10 < X \leq 14)$

Exercice 7 - Un seuil de 95 %

Soit $X \sim B(30; 0,4)$. Déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,95$. Interpréter.

Exercice 8 - Un jeu avec trois dés

On mise 3 € et on lance trois dés ; on reçoit 5 € par 6 obtenu. On note X le nombre de 6 et G le gain net.

- a) Exprimer G en fonction de X .
- b) Calculer $E(G)$. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 9 - Retrouver les paramètres

Une variable X suit une loi binomiale d'espérance 6 et de variance 4,2. Déterminer ses paramètres n et p .

Exercice 10 - La fréquence de succès

On lance n fois une pièce équilibrée ; X est le nombre de « pile » et $F = \frac{X}{n}$ la fréquence de « pile ».

- a) Exprimer $E(F)$ et $\sigma(F)$ en fonction de n .
- b) Calculer $\sigma(F)$ pour $n = 100$ et $n = 400$. Que constate-t-on ?

Exercice 11 - Symétrie de la loi

Soit $X \sim B(n; p)$.

- a) Montrer que $Y = n - X$ suit la loi $B(n; 1 - p)$.
- b) En déduire que, pour $p = \frac{1}{2}$, $P(X = k) = P(X = n - k)$.

Exercice 12 - Un effet secondaire rare

Un effet secondaire survient chez 0,2 % des patients traités. Un hôpital traite 1 000 patients (réactions indépendantes).

- a) Quelle est la loi du nombre X de patients présentant l'effet ?
- b) Calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geq 1)$, ainsi que $E(X)$.

Exercice 13 – La surréservation

Une compagnie vend 52 billets pour un avion de 50 places. Chaque passager se présente avec la probabilité 0,9, indépendamment. On note X le nombre de passagers présents.

- a) Quelle est la loi de X ?
- b) Calculer la probabilité que des passagers soient refusés à l'embarquement.

Exercice 14 – Un prétendu voyant

Une personne prétend deviner la couleur (rouge ou noire) de cartes tirées au hasard. Sur 10 cartes, elle en devine 8. On suppose qu'elle répond au hasard.

- a) Quelle est la loi du nombre X de bonnes réponses ?
- b) Calculer $P(X \geq 8)$. Le résultat est-il convaincant ?

Exercice 15 – Avec ou sans remise dans une grande urne

Une urne contient 1 000 boules, dont 100 rouges. On tire 5 boules.

- a) Calculer la probabilité de n'obtenir aucune rouge si les tirages se font **sans remise**.
- b) Comparer avec le modèle binomial $B(5; 0,1)$. Commenter.