

Plaquette 1 – Loi de probabilité et espérance

Variables aléatoires (lois) – Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Une variable aléatoire associe un **nombre** à chaque issue. Sa **loi** donne la probabilité de chacune de ses valeurs (tableau dont les probabilités ont pour somme 1). Son **espérance** est la moyenne de ses valeurs, pondérée par leurs probabilités : c'est la valeur moyenne obtenue si l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois. Pour un jeu, on raisonne sur le **gain net** (gain moins mise).

Exercice 1 – La roue de la fête foraine

Une roue est partagée en 8 secteurs égaux : 1 secteur fait gagner 10 €, 3 secteurs font gagner 2 €, les 4 autres ne rapportent rien. On note X le gain.

- Donner la loi de X .
- Calculer $E(X)$ et l'interpréter.

Exercice 2 – Deux pièces

On lance deux pièces équilibrées et on note X le nombre de « pile ».

- Donner la loi de X et la représenter par un diagramme en barres.
- Calculer $E(X)$.

Exercice 3 – Une probabilité manquante

La loi de X est donnée par le tableau :

x_i	-1	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,35	p	0,15

- Déterminer p .
- Calculer $E(X)$.

Exercice 4 – Tirage simultané

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules blanches. On tire **simultanément** 2 boules et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

- Déterminer la loi de X .
- Calculer $E(X)$.

Exercice 5 – Gain net d'un jeu

Pour jouer, on paie 3 €, puis on lance un dé : un 6 rapporte 15 €, un 5 rapporte 5 €, les autres résultats ne rapportent rien. On note G le gain **net** (ce qu'on reçoit moins la mise).

- Donner la loi de G .

b) Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 6 - Lire des probabilités dans une loi

La loi d'une variable X est :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,05	0,2	0,35	0,3	0,1

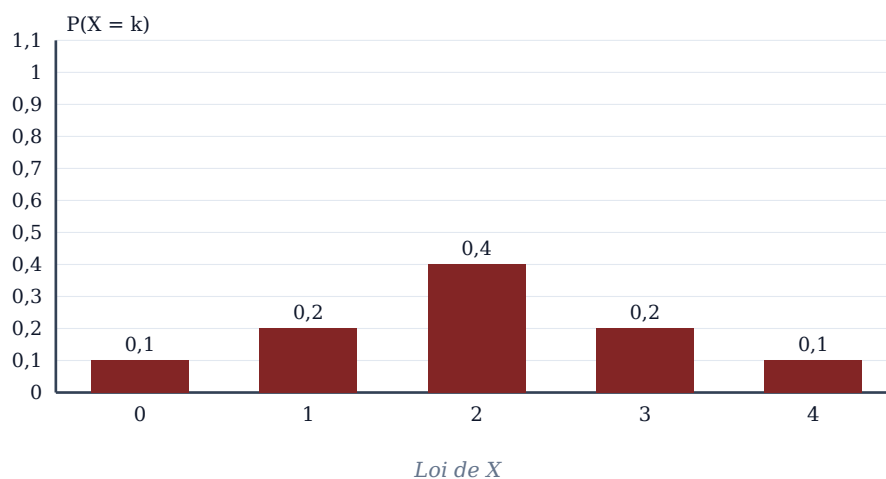
Calculer $P(X \leq 1)$, $P(X > 2)$, $P(1 \leq X < 4)$ et $E(X)$.

Exercice 7 - Espérance par symétrie

Le diagramme ci-dessous représente la loi d'une variable X .

a) Lire la loi de X .

b) Sans calcul, donner $E(X)$; vérifier ensuite par le calcul.



Exercice 8 - Une loi définie par une formule

Une variable X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 avec $P(X = k) = c k$, où c est une constante.

a) Déterminer c .

b) Calculer $E(X)$ et $P(X \geq 3)$.

Exercice 9 - Le rang du premier pile

On lance une pièce équilibrée au plus 3 fois, en s'arrêtant dès qu'on obtient « pile ». On note X le rang du premier « pile », avec $X = 0$ si l'on n'obtient jamais « pile ».

a) Déterminer la loi de X .

b) Calculer $E(X)$.

Exercice 10 - Espérance et moyenne observée

Un joueur a joué 1 000 parties au jeu de la roue (gain X avec $E(X) = 2$ €). Il a gagné au total 2 037 €.

a) Quel est son gain moyen par partie ? Comparer à $E(X)$.

b) Un autre joueur a joué 10 parties et gagné 34 €. Faut-il en conclure que la roue est truquée ?

Exercice 11 – La tombola de la kermesse

Une tombola vend 200 billets à 2 €. Les lots sont : un lot de 100 €, cinq lots de 20 €, vingt lots de 5 €. On note G le gain net d'un acheteur d'un billet.

- Donner la loi de G .
- Calculer $E(G)$ et en déduire le bénéfice de l'organisateur.

Exercice 12 – Changer d'unité

Le prix d'un article, en dollars, est une variable aléatoire X d'espérance 40 dollars. On convertit en euros (1 dollar vaut 0,92 €) et on ajoute des frais fixes de 5 €.

- Exprimer le prix en euros Y en fonction de X .
- Calculer $E(Y)$.

Exercice 13 – Comparer deux jeux

Jeu A : on gagne 10 € avec la probabilité 0,3, sinon on perd 3 €. Jeu B : on gagne 50 € avec la probabilité 0,05, sinon on perd 1 €.

- Calculer l'espérance du gain pour chaque jeu.
- Quel jeu choisir si l'on joue très souvent ? Et si l'on ne joue qu'une fois ?

Exercice 14 – L'écart entre deux dés

On lance deux dés équilibrés et on note D la valeur absolue de la différence des deux résultats.

- Déterminer la loi de D .
- Calculer $E(D)$.

Exercice 15 – Rendre un jeu équitable

On lance un dé. Si l'on obtient 6, on gagne g euros ; sinon, on perd 1 euro.

- Exprimer l'espérance du gain en fonction de g .
- Pour quelle valeur de g le jeu est-il équitable ?