

Plaquette 4 - Sommes de variables — type bac

Variables aléatoires (lois) — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

Pour une somme de variables, on n'a presque jamais besoin de sa loi : l'**espérance d'une somme est la somme des espérances** (toujours), et la **variance d'une somme est la somme des variances** quand les variables sont **indépendantes**. On découpe donc un problème en variables simples (souvent de Bernoulli), on additionne, puis on revient à l'écart-type par une racine carrée.

Exercice 1 - La somme de trois dés

On lance trois dés équilibrés et on note S la somme des résultats. On rappelle que pour un dé, $E = 3,5$ et $V = \frac{35}{12}$.

Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$ sans déterminer la loi de S .

Exercice 2 - Combiner deux gains

Deux jeux indépendants ont pour gains X ($E(X) = 2$, $V(X) = 1$) et Y ($E(Y) = -1$, $V(Y) = 4$). Calculer l'espérance et la variance de :

- a) $X + Y$
- b) $2X - Y$
- c) $X - Y$

Exercice 3 - Espérance et variance de la loi binomiale

Soit $X \sim B(n; p)$. On écrit $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, où X_i vaut 1 si la i -ème épreuve est un succès et 0 sinon.

- a) Quelle est la loi de chaque X_i ? Rappeler son espérance et sa variance.
- b) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4 - Chiffre d'affaires d'une journée

Un magasin reçoit 100 clients par jour. La dépense de chaque client est une variable d'espérance 30 € et d'écart-type 10 €, les dépenses étant indépendantes.

Calculer l'espérance et l'écart-type du chiffre d'affaires quotidien S .

Exercice 5 - La moyenne de plusieurs lancers

On lance 25 fois un dé équilibré ($E = 3,5$, $\sigma \approx 1,708$) et on calcule la moyenne M des résultats.

- a) Calculer $E(M)$ et $\sigma(M)$.
- b) Même question avec 100 lancers. Interpréter.

Exercice 6 - Quand l'indépendance manque

Soit X une variable de variance $V(X) = 3$.

- Calculer $V(X + X) = V(2X)$.
- Un élève applique la formule de la somme et trouve $V(X) + V(X) = 6$. Où est l'erreur ?

Exercice 7 - Temps de trajet

Un trajet comporte deux étapes indépendantes : la première dure en moyenne 20 min (écart-type 4 min), la seconde 35 min (écart-type 3 min).

Calculer l'espérance et l'écart-type de la durée totale.

Exercice 8 - Diversifier un placement

Deux placements indépendants ont des rendements annuels R_1 (espérance 5 %, écart-type 10 %) et R_2 (espérance 3 %, écart-type 4 %). On investit la moitié du capital dans chacun : le rendement vaut $R = 0,5R_1 + 0,5R_2$.

Calculer $E(R)$ et $\sigma(R)$. Comparer au placement 1 seul.

Exercice 9 - Le joueur régulier

À chaque partie d'un jeu, le gain est une variable d'espérance $-0,2$ € et d'écart-type 3 €. Un joueur joue 100 parties indépendantes ; on note S son gain total.

- Calculer $E(S)$ et $\sigma(S)$.
- Même question pour 10 000 parties. Commenter.

Exercice 10 - Somme de deux binomiales

Un magasin a deux caisses. À la caisse 1, sur 30 clients, chacun paie par carte avec la probabilité 0,7 ; à la caisse 2, sur 20 clients, avec la même probabilité. Les comportements sont indépendants. On note X et Y les nombres de paiements par carte.

- Donner les lois de X et Y , puis $E(X + Y)$ et $V(X + Y)$.
- Quelle est la loi de $X + Y$? Retrouver les résultats du a).

Exercice 11 - Le poids d'un carton

Un paquet de café a une masse (en g) d'espérance 250 et d'écart-type 5. Un carton contient 12 paquets dont les masses sont indépendantes ; l'emballage pèse exactement 200 g.

Calculer l'espérance et l'écart-type de la masse totale du carton.

Exercice 12 - La loi d'une somme

X suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,3 et Y suit la loi uniforme sur $\{0; 1; 2\}$; X et Y sont indépendantes.

- Déterminer la loi de $S = X + Y$.
- Calculer $E(S)$ de deux façons.

Exercice 13 – Pénalités dans un QCM

Un QCM comporte 20 questions à 5 choix. Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise en retire 0,25. Un élève répond **au hasard** à toutes les questions. On note X_i le nombre de points obtenus à la question i et N la note totale.

- a) Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
- b) En déduire $E(N)$ et $\sigma(N)$. Interpréter.

Exercice 14 – La tournée du livreur

Un livreur a 40 colis à livrer. Chaque colis est livré avec la probabilité 0,9, indépendamment. Un colis livré lui rapporte 2 €, un colis non livré lui coûte 1 €. On note X le nombre de colis livrés et G son gain.

- a) Montrer que $G = 3X - 40$.
- b) Calculer $E(G)$ et $\sigma(G)$.

Exercice 15 – Combien de mesures ?

On estime une grandeur en faisant la moyenne de n mesures indépendantes, chacune ayant un écart-type de 1,7 (les mesures étant sans biais).

- a) Exprimer l'écart-type de la moyenne M_n en fonction de n .
- b) Combien de mesures faut-il pour que cet écart-type soit inférieur à 0,1 ?