Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : loi binomiale, espérance et jeux équitables

Variables aléatoires (lois) — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

On identifie la **loi** (Bernoulli, binomiale, loi donnée par un tableau), on calcule **espérance**, **variance** et **écart type**, on cherche des **seuils** par tâtonnement ou logarithme, et on décide si un jeu est **équitable**.

Exercice 1 – Loi donnée par un tableau

La variable X prend les valeurs -2, 0, 1, 3 avec les probabilités 0,2, 0,3, 0,4 et 0,1. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 2 – Paramètre inconnu dans une loi

X prend les valeurs 1, 2, 3 avec les probabilités a, $2a$ et 0,4. Déterminer a puis $E(X)$.

Exercice 3 – Coefficients binomiaux

Calculer $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{10}{3}$ et $\binom{10}{10}$.

Exercice 4 – Loi binomiale : probabilités ponctuelles

Soit $X \sim B(8\,;0{,}25)$. Calculer $P(X=0)$, $P(X=2)$ et $P(X \geq 1)$.

Exercice 5 – Espérance et variance d'une binomiale

Une machine produit 3 % de pièces défectueuses. On prélève 500 pièces (tirage assimilé à un tirage avec remise). Calculer l'espérance, la variance et l'écart type du nombre de pièces défectueuses.

Exercice 6 – Seuil avec une binomiale

Un QCM comporte n questions à 4 choix. Un élève répond au hasard. Combien de questions faut-il pour que la probabilité qu'il ait au moins une bonne réponse dépasse 0,99 ?

Exercice 7 – Jeu équitable

À un jeu, on mise 2 €. On gagne 10 € avec la probabilité 0,1, 3 € avec la probabilité 0,3, rien sinon. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 8 – Détermination d'une mise

On lance deux dés. On gagne 12 € si la somme vaut 7, 6 € si elle vaut 6 ou 8, rien sinon. Quelle mise rend le jeu équitable ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Transformation affine

Soit $X \sim B(20\,;0{,}4)$ et $Y = 5X - 10$. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 10 – Somme de deux dés

Soit S la somme de deux dés équilibrés. Calculer $E(S)$ et $V(S)$ sans écrire la loi complète.

Exercice 11 – Contrôle de qualité

Un lot est accepté si, sur 20 pièces prélevées, au plus une est défectueuse. La proportion de défectueuses est 5 %. Calculer la probabilité d'accepter le lot.

Exercice 12 – Valeur la plus probable

Soit $X \sim B(10\,;0{,}3)$. Déterminer la valeur de k pour laquelle $P(X = k)$ est maximale.

Exercice 13 – Comparaison de deux stratégies

Un candidat peut répondre à un QCM de 10 questions (4 choix, +3 points par bonne réponse, -1 par mauvaise) ou bien s'abstenir (0 point). Répondre au hasard à toutes les questions est-il avantageux ?

Exercice 14 – Loi d'un maximum

On lance deux dés et on note M le plus grand des deux résultats. Déterminer la loi de M, puis $E(M)$.

Exercice 15 – Binomiale et intervalle

Une pièce équilibrée est lancée 100 fois. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ pour le nombre de « pile », puis l'intervalle $[E(X) - 2\sigma(X)\,;E(X) + 2\sigma(X)]$.

Exercice 16 – Synthèse : assurance

Un assureur propose un contrat à 150 € par an. Un sinistre survient avec la probabilité 0,03 et coûte 3000 € à l'assureur.

a) Calculer l'espérance du gain de l'assureur par contrat.

b) Calculer l'écart type de ce gain.

c) Sur 10 000 contrats, quel bénéfice l'assureur peut-il espérer ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).