

Plaquette 2 - Variance, écart-type et transformations

Variables aléatoires (lois) — Terminale spé maths

Exercices

Méthode

L'espérance donne la valeur moyenne, la **variance** et l'**écart-type** mesurent la **dispersion** autour d'elle — c'est-à-dire le risque. On calcule la variance le plus souvent par la formule $E(X^2) - E(X)^2$. Pour une transformation affine $aX + b$, l'espérance suit la transformation, mais la variance est multipliée par a^2 et n'est pas affectée par b .

Exercice 1 - Variance par la définition

X prend les valeurs 0, 1, 2 avec les probabilités 0,25, 0,5 et 0,25.
Calculer $E(X)$, $V(X)$ par la définition, et $\sigma(X)$.

Exercice 2 - La formule de König-Huygens

X prend les valeurs 1, 2, 4 avec les probabilités 0,5, 0,3 et 0,2.
Calculer $E(X)$, $E(X^2)$, puis $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 3 - Transformations affines

Une variable X a pour espérance 5 et pour variance 4. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de :

- a) $Y = 3X - 2$
- b) $Z = 10 - X$
- c) $W = X + 100$

Exercice 4 - Des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit

La température (en °C) d'un lieu à midi est une variable C d'espérance 20 et d'écart-type 3. En degrés Fahrenheit, $F = 1,8C + 32$.

Calculer l'espérance et l'écart-type de F .

Exercice 5 - Mesurer le risque de deux jeux

Jeu A : gain de 10 € avec la probabilité 0,3, perte de 3 € sinon ($E = 0,9$). Jeu B : gain de 50 € avec la probabilité 0,05, perte de 1 € sinon ($E = 1,55$).

Calculer l'écart-type du gain pour chaque jeu et comparer les deux jeux.

Exercice 6 - Centrer et réduire

Soit X une variable d'espérance μ et d'écart-type $\sigma > 0$. On pose $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

- a) Montrer que $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$.

b) Application : une note a pour moyenne 12 et écart-type 3. Que vaut Z pour une note de 18 ? de 9 ?

Exercice 7 - Une variance nulle

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec des probabilités $p_1, \dots, p_n$ **strictement positives**.

Démontrer que $V(X) = 0$ si et seulement si X est constante.

Exercice 8 - Le dé équilibré

Soit X le résultat d'un dé équilibré à six faces. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 9 - La variable de Bernoulli

Soit X une variable de Bernoulli de paramètre p ($X = 1$ avec la probabilité p , $X = 0$ sinon).

- Montrer que $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.
- Pour quelle valeur de p la variance est-elle maximale ? Interpréter.

Exercice 10 - Retrouver les valeurs

Une variable X prend deux valeurs $a < b$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacune. On sait que $E(X) = 5$ et $\sigma(X) = 2$. Déterminer a et b .

Exercice 11 - Compléter une loi

X prend les valeurs 0, 1, 2 avec les probabilités p , q et 0,3. On sait que $E(X) = 1$.

- Déterminer p et q .
- Calculer $V(X)$.

Exercice 12 - Augmentation de salaire

Dans une entreprise, le salaire mensuel S a pour moyenne 2 000 € et pour écart-type 300 €. On augmente chaque salaire de 5 %, puis on ajoute une prime de 50 €.

- Exprimer le nouveau salaire S' en fonction de S .
- Calculer la moyenne et l'écart-type de S' . Les écarts de salaire ont-ils augmenté ?

Exercice 13 - La loi uniforme sur 1, ..., n

X suit la loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; n\}$. On admet que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Montrer que $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
- Montrer que $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ et vérifier pour le dé ($n = 6$).

Exercice 14 – Attention aux unités

La taille T (en mètres) des élèves d'un lycée a pour espérance 1,70 m et pour écart-type 0,10 m.

- a) Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la taille exprimée en centimètres.
- b) Pourquoi préfère-t-on l'écart-type à la variance pour décrire la dispersion ?

Exercice 15 – Même espérance, risques différents

À la roulette (37 cases numérotées de 0 à 36), on mise 1 €.

- Mise sur un numéro : on gagne 35 € (en plus de la mise rendue) avec la probabilité $\frac{1}{37}$, sinon on perd 1 €.
- Mise sur « rouge » (18 cases) : on gagne 1 € avec la probabilité $\frac{18}{37}$, sinon on perd 1 €.

Comparer les espérances et les écarts-types des gains.