

Plaquette 4 - Simuler le hasard : Monte-Carlo et fréquences

Algorithmique et Python — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Simuler, c'est remplacer un calcul de probabilité par un grand nombre d'expériences virtuelles. Le schéma est toujours le même : **une boucle** qui répète N fois l'expérience, **un compteur** de succès, et une **fréquence** finale $\frac{\text{succès}}{N}$. Le résultat change à chaque exécution : c'est normal, et cette fluctuation se maîtrise en augmentant N .

Exercice 1 - Deux générateurs à ne pas confondre

Pour chacune des instructions, indiquer l'ensemble des valeurs possibles.

- a) `random()`
- b) `randint(1, 6)`
- c) `randint(0, 1)`
- d) `2 * random()`

Exercice 2 - Simuler un événement de probabilité donnée

Une pièce est défectueuse avec la probabilité 0,03.

Écrire une fonction qui simule le prélèvement d'une pièce et renvoie `True` si elle est défectueuse. Justifier.

Exercice 3 - Compter des succès

Compléter ce programme qui estime la probabilité d'obtenir un nombre pair en lançant un dé, puis indiquer la valeur attendue.

```
from random import randint

def frequencePair(N):
    succes = 0
    for i in range(N):
        de = randint(1, ...)
        if de % 2 == ...:
            succes = succes + 1
    return succes / ...
```

Exercice 4 - Simuler une loi binomiale

Une machine produit 20 % de pièces à retoucher. On prélève 10 pièces et on veut estimer la probabilité qu'au moins 3 soient à retoucher.

- a) Écrire le programme de simulation.
- b) Donner la valeur théorique, sachant que $P(X = 0) \approx 0,107\,374$, $P(X = 1) \approx 0,268\,435$ et $P(X = 2) \approx 0,301\,990$.

Exercice 5 - Estimer une aire par Monte-Carlo

On tire au hasard un point $M(x; y)$ dans le carré $[0; 1] \times [0; 1]$ et on compte les points vérifiant $y < x^2$.

- a) Que représente la fréquence obtenue ?
- b) Écrire le programme.
- c) Quelle valeur doit-il approcher ?

Exercice 6 - Estimer le nombre pi

On tire au hasard un point dans le carré $[0; 1] \times [0; 1]$ et on compte les points vérifiant $x^2 + y^2 < 1$.

- a) Quelle est la probabilité théorique de cet événement ?
- b) Comment en déduire une estimation de π ?
- c) Écrire le programme.

Exercice 7 - Pourquoi deux exécutions diffèrent

Un élève lance trois fois la même simulation avec $N = 1\,000$ et obtient 0,512, 0,486 et 0,497.

- a) Le programme est-il faux ?
- b) Que faut-il modifier pour resserrer les résultats ?

Exercice 8 - Choisir la taille de la simulation

On souhaite estimer une probabilité avec une précision de l'ordre de 0,01.

- a) Quelle valeur de N choisir ?
- b) Et pour une précision de 0,001 ?

Exercice 9 - La somme de deux dés

Écrire un programme qui estime la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 en lançant deux dés, puis donner la valeur théorique.

Exercice 10 - Estimer un gain moyen

Un jeu coûte 2 € : on lance un dé, et le joueur reçoit 10 € si le 6 sort, rien sinon.

- a) Écrire un programme qui estime le gain moyen du joueur.
- b) Calculer la valeur théorique.

Exercice 11 - Trouver l'erreur

Ce programme devrait estimer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en trois lancers de dé, mais il renvoie toujours une valeur voisine de 0,5.

```
from random import randint
```

```
def simulation(N):
```

```

succes = 0
for i in range(N):
    for j in range(3):
        if randint(1, 6) == 6:
            succes = succes + 1
    return succes / N

```

Expliquer et corriger.

Exercice 12 - Simuler un contrôle de production

Une ligne produit 6 % de pièces non conformes. Un lot de 50 pièces est refusé s'il en contient plus de 4.

Écrire le programme estimant la probabilité de refus, et donner l'espérance du nombre de pièces non conformes.

Exercice 13 - Compter les essais jusqu'au succès

Un test réussit avec la probabilité 0,25 à chaque essai, indépendamment des précédents.

- Écrire une fonction qui simule le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un premier succès.
- Écrire la fonction qui estime la moyenne de ce nombre sur N répétitions.

Exercice 14 - Simulation ou calcul ?

Pour chacune des questions, dire s'il vaut mieux simuler ou calculer.

- Probabilité d'obtenir exactement 3 succès dans $B(10; 0,4)$.
- Probabilité que la somme de cinq dés dépasse 20.
- Probabilité qu'un composant tombe en panne dans l'année, sachant que $p = 0,02$.

Exercice 15 - Comparer simulation et théorie

Une simulation de $N = 10\,000$ répétitions estime à 0,329 une probabilité dont la valeur théorique est 0,322.

- L'écart est-il compatible avec la fluctuation d'échantillonnage ?
- Quelle conclusion tirer si la simulation avait donné 0,450 ?

Exercice 16 - Synthèse : estimer un risque industriel

Une installation comporte 3 pompes indépendantes. Chaque pompe tombe en panne dans le mois avec la probabilité 0,08. L'installation est à l'arrêt si **les trois** pompes sont en panne ; elle fonctionne en mode dégradé si exactement deux le sont.

- Écrire une fonction qui simule un mois et renvoie le nombre de pompes en panne.
- Écrire la fonction qui estime la probabilité d'un arrêt total.
- Calculer les valeurs théoriques de l'arrêt total et du mode dégradé.
- Sur 500 installations identiques, combien attendre d'arrêts totaux par an ? Une simulation avec $N = 1\,000$ suffirait-elle à estimer ce risque ?