

Plaquette 1 – Proportions, évolutions et calculs rapides

Automatismes — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Proportions : $t\%$ de N vaut $N \times \frac{t}{100}$; une proportion de proportion se multiplie.

Évolution de V_I à V_F :

$$t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \quad CM = 1 + t \quad V_F = V_I \times CM$$

Évolutions successives : $CM = CM_1 \times CM_2 \times \dots$; évolution réciproque : $\frac{1}{CM}$.

Taux moyen sur n périodes pour un coefficient global CM :

$$1 + t_m = CM^{1/n}$$

Indice base 100 : $I = \frac{V}{V_{\text{réf}}} \times 100$.

Points et pourcentages : passer de 12 % à 15 %, c'est +3 points, mais +25 % en valeur relative.

Puissances de dix : $10^a \times 10^b = 10^{a+b}$ et $\frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$.

Fractions : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse.

Correction de l'exercice 1 - Proportions sans calculatrice

On décompose chaque pourcentage en pourcentages « faciles » :

$$10\% = \frac{1}{10} \quad 5\% = \frac{1}{20} \quad 25\% = \frac{1}{4}$$

- a) 10 % de 45 vaut 4,5, donc 20 % vaut 9.
- b) 10 % de 360 vaut 36, donc 5 % vaut 18.
- c) 1 % de 800 vaut 8, donc 2,5 % vaut $2,5 \times 8 = 20$.
- d) $125\% = 100\% + 25\%$: $48 + 12 = 60$.

— **Contrôle de d)** : $48 \times 1,25 = 48 \times \frac{5}{4} = 12 \times 5 = 60 \checkmark$

Réponse. a) 9 · b) 18 · c) 20 · d) 60.

Correction de l'exercice 2 - Proportion dans une sous-population

a) « 30 % de 60 % » : les proportions se multiplient.

$$p = 0,3 \times 0,6 = 0,18 = 18\%$$

b) 18 % de 450 : $450 \times 0,18 = 81$ techniciens.

— **Vérification en deux temps** : production $450 \times 0,6 = 270$ salariés ; techniciens $270 \times 0,3 = 81 \checkmark$

— **Piège** : 30 % ne porte pas sur toute l'entreprise, mais sur la production seulement.

Réponse. a) 18 % · b) 81.

Correction de l'exercice 3 - Taux et coefficient multiplicateur

Le coefficient est le quotient $\frac{V_F}{V_I}$, et le taux s'en déduit :

$$CM = \frac{V_F}{V_I} \quad t = CM - 1$$

a) $CM = \frac{320}{250} = \frac{32}{25} = 1,28$, donc $t = 0,28$: **hausse de 28 %**.

b) $CM = \frac{900}{1\,200} = \frac{3}{4} = 0,75$, donc $t = -0,25$: **baisse de 25 %**.

— **Contrôle de a)** : $250 \times 1,28 = 250 + 70 = 320$ ✓

— **De tête** : $\frac{32}{25} = \frac{128}{100}$ en multipliant par 4.

Réponse. a) 1,28 ; +28 % · b) 0,75 ; -25 %.

Correction de l'exercice 4 - Deux évolutions successives

Les coefficients multiplicateurs se **multiplient** :

$$CM = CM_1 \times CM_2$$

a) $CM = 1,2 \times 1,2 = 1,44$: hausse globale de 44 % (et non de 40 %).

b) $CM = 1,5 \times 0,5 = 0,75$: **baisse** globale de 25 %.

— **Exemple de b)** : $100 \rightarrow 150 \rightarrow 75$. La baisse de 50 % s'applique à 150 et retire 75, plus que les 50 gagnés.

— **À retenir** : additionner les taux est faux dès qu'il y a plusieurs évolutions ; l'écart grandit avec la taille des taux.

Réponse. a) +44 % · b) -25 %.

Correction de l'exercice 5 - Évolutions réciproques

L'évolution réciproque a pour coefficient l'**inverse** du coefficient de départ :

$$CM' = \frac{1}{CM}$$

a) $CM = 1,25 = \frac{5}{4}$, donc $CM' = \frac{4}{5} = 0,8$: une **baisse de 20 %**.

b) $CM = 0,6 = \frac{3}{5}$, donc $CM' = \frac{5}{3} \approx 1,667$: une **hausse d'environ 66,7 %**.

— **Vérification de b)** : $100 \rightarrow 60 \rightarrow 60 \times \frac{5}{3} = 100$ ✓

— **Remarque** : plus une baisse est forte, plus la hausse nécessaire pour la compenser est grande.

Réponse. a) -20 % · b) +66,7 % environ.

Correction de l'exercice 6 - Taux d'évolution moyen

Le taux moyen t_m est le taux constant qui, appliqué n fois, donne la même évolution globale :

$$(1 + t_m)^n = CM \quad \text{donc} \quad 1 + t_m = CM^{1/n}$$

a) $(1 + t_m)^2 = 1,21$, donc $1 + t_m = \sqrt{1,21} = 1,1$: $t_m = 10$ % par an.

b) $(1 + t_m)^{10} = 2$, donc $1 + t_m = 2^{1/10} \approx 1,0718$: $t_m \approx 7,18$ % par an.

- **Piège** : le taux moyen n'est pas $\frac{21}{2} = 10,5\%$ ni $\frac{100}{10} = 10\%$; on prend une racine, pas une division.
 - **Contrôle de a)** : $1,1^2 = 1,21$ ✓
- Réponse.** a) 10% · b) environ $7,18\%$.

Correction de l'exercice 7 - Lire et calculer un indice

L'indice compare une valeur à la valeur de référence ramenée à 100 :

$$I = \frac{V}{V_{\text{réf}}} \times 100$$

- a) $I_{2025} = \frac{92}{80} \times 100 = 1,15 \times 100 = 115$.
- b) Prix : $80 \times \frac{120}{100} = 80 \times 1,2 = 96$ €. L'indice 120 traduit une **hausse de 20%** depuis 2020.
- **Lecture directe** : un indice 115 signifie « +15 % par rapport à l'année de base ».
- **Piège** : entre 2025 et 2026, l'évolution n'est pas de 5 % (écart d'indices), mais de $\frac{120 - 115}{115} \approx 4,3\%$.

Réponse. a) 115 · b) 96 € ; +20 %.

Correction de l'exercice 8 - Points de pourcentage

- a) Une différence de deux pourcentages se mesure en **points** : $15 - 12 = 3$ points.
- b) L'évolution relative du taux lui-même se calcule comme tout taux d'évolution :

$$t = \frac{15 - 12}{12} = \frac{3}{12} = 0,25 = 25\%$$

Le taux de rebut a augmenté de 25 %.

- **Interprétation** : pour 1 000 pièces, on passe de 120 à 150 rebuts : 30 de plus, soit un quart de plus.
- **Piège** : dire « le rebut a augmenté de 3 % » est faux ; c'est **3 points**.

Réponse. a) 3 points · b) +25 %.

Correction de l'exercice 9 - Calcul fractionnaire rapide

On applique les règles des fractions et les priorités :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

- a) Même dénominateur 6 : $\frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.
- b) On simplifie avant de multiplier : $\frac{3 \times 8}{4 \times 9} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.
- c) Diviser par $\frac{1}{4}$, c'est multiplier par 4 : $\frac{1}{2} \times 4 = 2$.
- d) La multiplication d'abord : $\frac{3}{8} \times 2 = \frac{3}{4}$, puis $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
- **Contrôle de c)** : il y a bien deux quarts dans une moitié ✓

Réponse. a) $\frac{3}{2}$ · b) $\frac{2}{3}$ · c) 2 · d) $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 10 - Calculs avec des puissances de dix

On calcule séparément les nombres décimaux et les puissances de dix :

$$10^a \times 10^b = 10^{a+b} \quad \frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$$

a) $10^{3+(-5)} = 10^{-2}$, soit $1 \times 10^{-2} = 0,01$.

b) $(2 \times 3) \times 10^{4-2} = 6 \times 10^2 = 600$.

c) $\frac{4,5}{1,5} \times 10^{6-2} = 3 \times 10^4$.

— **Application** : c) est le calcul d'une intensité $I = \frac{P}{U}$ en ordre de grandeur, ou d'un nombre de pièces à partir d'une masse totale.

— **Piège** : $10^3 \times 10^{-5} \neq 10^{-15}$; on **ajoute** les exposants, on ne les multiplie pas.

Réponse. a) 10^{-2} · b) 6×10^2 · c) 3×10^4 .

Correction de l'exercice 11 - Équations de tête

On isole x en appliquant l'opération inverse de chaque côté.

a) $3x = 11 + 7 = 18$, donc $x = 6$.

b) $x = 2,5 \times 4 = 10$.

c) $x = \frac{64}{0,8} = \frac{640}{8} = 80$ (c'est la « valeur initiale » d'une baisse de 20 % arrivant à 64).

d) Deux solutions :

$$x^2 = 49 \Leftrightarrow x = 7 \text{ ou } x = -7$$

— **Contrôle de a)** : $3 \times 6 - 7 = 18 - 7 = 11$ ✓

— **Piège de d)** : on oublie souvent la solution négative, car $(-7)^2 = 49$ aussi.

Réponse. a) 6 · b) 10 · c) 80 · d) 7 ou -7.

Correction de l'exercice 12 - Retourner une formule

a) On isole I en divisant les deux membres par U :

$$P = U \times I \Leftrightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{2\,300}{230} = 10 \text{ A}$$

b) On isole t : $t = \frac{E}{P}$. On met les unités en accord : $P = 2\,300 \text{ W} = 2,3 \text{ kW}$.

$$t = \frac{6,9}{2,3} = 3 \text{ h.}$$

— **Contrôle** : $2,3 \text{ kW} \times 3 \text{ h} = 6,9 \text{ kWh}$ ✓

— **Piège** : diviser 6,9 kWh par 2 300 W donnerait 0,003, faute d'avoir converti les watts en kilowatts.

Réponse. a) 10 A · b) 3 h.

Correction de l'exercice 13 - Rendements en cascade

a) En série, chaque étage ne transmet qu'une proportion de ce qu'il reçoit : les rendements se **multiplient**.

$$\eta = 0,95 \times 0,9 \times 0,8 = 0,855 \times 0,8 = 0,684$$

soit 68,4 %.

b) $P_u = 5 \times 0,684 = 3,42$ kW.

— **De tête** : $0,9 \times 0,8 = 0,72$, puis $0,72 \times 0,95 = 0,72 - 0,036 = 0,684$.

— **Remarque** : le rendement global est toujours plus faible que le plus faible des rendements (80 %).

Réponse. a) 68,4 % · b) 3,42 kW.

Correction de l'exercice 14 - Lire une décroissance exponentielle

a) On lit $Q(0) = 200$ mg et $Q(2) \approx 128$ mg. Par le calcul : $Q(0) = 200 \times 1 = 200$ et

$$Q(2) = 200 \times 0,8^2 = 200 \times 0,64 = 128 \text{ mg}$$

b) D'une heure à la suivante, on multiplie par $0,8 = 1 - 0,2$: la quantité **baisse de** 20 % par heure.

c) On cherche l'antécédent de 100 : l'horizontale $Q = 100$ coupe la courbe vers $t \approx 3,1$ h, soit un peu plus de 3 heures.

— **Contrôle** : $Q(3) = 128 \times 0,8 = 102,4$, légèrement au-dessus de 100 ✓

— **Piège** : la baisse n'est pas de 40 mg par heure ; elle est de 20 % de la quantité **restante**, donc de plus en plus petite en mg.

Réponse. a) 200 et 128 mg · b) –20 % par heure · c) environ 3,1 h.

Correction de l'exercice 15 - Trois ans d'augmentation

a) Trois hausses successives de 5 % : on multiplie trois fois par 1,05.

$$30 \times 1,05^3 = 30 \times 1,157\,625 \approx 34,73 \text{ €}$$

b) $CM = 1,05^3 \approx 1,1576$: hausse globale d'environ 15,76 % (et non 15 %).

c) On poursuit la suite des prix : $1,05^5 \approx 1,276$ donne 38,29 € et $1,05^6 \approx 1,340$ donne 40,20 €. Le prix dépasse 40 € au bout de 6 **ans**.

— **Méthode** : une évolution à taux constant est une suite **géométrique** de raison 1,05 ; on tabule à la calculatrice.

Réponse. a) 34,73 € · b) +15,76 % environ · c) 6 ans.