

Plaquette 1 - Aires, primitives, valeur moyenne et Chasles

Calcul intégral — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Pour f **positive** et continue sur $[a; b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est l'**aire**, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $t = a$ et $t = b$.
- **Calcul par primitive** : si $F' = f$ sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- Primitives usuelles : $t^n \rightarrow \frac{t^{n+1}}{n+1}$, $\frac{1}{t^2} \rightarrow -\frac{1}{t}$, $\cos(\omega t) \rightarrow \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$, $\sin(\omega t) \rightarrow -\frac{\cos(\omega t)}{\omega}$, $e^t \rightarrow e^t$.
- **Linéarité** :

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \int_a^b k f = k \int_a^b f$$

- **Relation de Chasles** : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.
- **Valeur moyenne** de f sur $[a; b]$:

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

- **Encadrement par rectangles** : si f est croissante sur $[a; b]$, alors $(b-a)f(a) \leq \int_a^b f \leq (b-a)f(b)$.
- Si f est négative sur $[a; b]$, l'intégrale est négative : l'aire géométrique vaut alors $-\int_a^b f$.

Correction de l'exercice 1 - Intégrale d'une fonction affine

On cherche une primitive, puis on évalue entre les bornes.

- Une primitive de $2t + 1$ est $F(t) = t^2 + t$.

$$\int_0^4 (2t + 1) dt = [t^2 + t]_0^4 = (16 + 4) - 0 = 20$$

- **Vérification géométrique** : le domaine est un trapèze de bases $f(0) = 1$ et $f(4) = 9$, de hauteur 4.
- Aire = $\frac{(1 + 9) \times 4}{2} = 20$. Même résultat.

Réponse. 20.

Correction de l'exercice 2 - Intégrale d'un polynôme

- Primitive : $F(t) = t^3 - t^2$.
- On évalue :

$$[t^3 - t^2]_1^3 = (27 - 9) - (1 - 1) = 18 - 0 = 18$$

- Contrôle de vraisemblance : sur $[1 ; 3]$, f varie de 1 à 21 ; l'aire d'un rectangle moyen d'environ 9 de hauteur sur une largeur de 2 donnerait 18. Cohérent.

Réponse. 18.

Correction de l'exercice 3 - Intégrale et fonction inverse

- Une primitive de $\frac{1}{t^2}$ est $-\frac{1}{t}$, donc une primitive de $\frac{2}{t^2}$ est $-\frac{2}{t}$.

$$\int_1^4 \frac{2}{t^2} dt = \left[-\frac{2}{t} \right]_1^4 = -\frac{2}{4} - \left(-\frac{2}{1} \right) = -0,5 + 2 = 1,5$$

- L'intégrale est positive, ce qui est cohérent : la fonction $\frac{2}{t^2}$ est positive sur $[1 ; 4]$.

Réponse. 1,5.

Correction de l'exercice 4 - Encadrement par rectangles

a) La fonction est croissante sur $[0 ; 2]$.

- Sur $[0 ; 1]$: l'aire est comprise entre $1 \times f(0) = 0$ et $1 \times f(1) = 1$.

- Sur $[1 ; 2]$: entre $1 \times f(1) = 1$ et $1 \times f(2) = 4$.

- En additionnant : $0 + 1 = 1 \leq \int_0^2 t^2 dt \leq 1 + 4 = 5$.

b) Valeur exacte : primitive $\frac{t^3}{3}$, donc

$$\int_0^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \approx 2,667$$

- $1 \leq 2,667 \leq 5$: l'encadrement est vérifié (il est large, car les rectangles sont grossiers).

Réponse. a) $1 \leq I \leq 5$ · b) $I = \frac{8}{3} \approx 2,667$.

Correction de l'exercice 5 - Linéarité

On applique la linéarité du cours.

- a) $\int_0^2 (f + g) = 5 + (-3) = 2$.

- b) $\int_0^2 3f = 3 \times 5 = 15$.

- c) $\int_0^2 (2f - g) = 2 \times 5 - (-3) = 10 + 3 = 13$.

- Remarque : aucune information sur f et g n'est nécessaire, la linéarité suffit.

Réponse. a) 2 · b) 15 · c) 13.

Correction de l'exercice 6 - Relation de Chasles

- a) Relation de Chasles : $\int_0^8 f = \int_0^3 f + \int_3^8 f = 7 + 12 = 19$.

- b) Échanger les bornes change le signe de l'intégrale :

$$\int_8^3 f = -\int_3^8 f = -12$$

- À retenir : $\int_a^b f = -\int_b^a f$, et $\int_a^a f = 0$.

Réponse. a) 19 · b) -12.

Correction de l'exercice 7 - Valeur moyenne

Formule du cours : $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$

- Intégrale : $\int_0^2 3t^2 dt = [t^3]_0^2 = 8.$
- Valeur moyenne : $m = \frac{1}{2-0} \times 8 = 4.$
- Interprétation : un rectangle de hauteur 4 et de largeur 2 a la même aire (8) que le domaine sous la courbe.
- Contrôle : f varie de 0 à 12 sur $[0; 2]$, donc une moyenne de 4 est plausible (la fonction reste longtemps petite).

Réponse. $m = 4.$

Correction de l'exercice 8 - Intégrale d'un signal sinusoïdal

- Une primitive de $\cos t$ est $\sin t$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

- Une primitive de $\sin t$ est $-\cos t$:

$$\int_0^{\pi} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$$

- Les deux résultats sont positifs, cohérent avec des fonctions positives sur les intervalles considérés.

Réponse. 1 puis 2.

Correction de l'exercice 9 - Valeur moyenne d'une tension

a) Une primitive de $\cos(100\pi t)$ est $\frac{\sin(100\pi t)}{100\pi}.$

$$\int_0^{0,01} 12 \cos(100\pi t) dt = 12 \left[\frac{\sin(100\pi t)}{100\pi} \right]_0^{0,01} = \frac{12}{100\pi} (\sin \pi - \sin 0).$$

- Or $\sin \pi = 0$: l'intégrale est **nulle**, donc la valeur moyenne sur $[0; 0,01]$ vaut 0.

b) Sur une période complète, l'intégrale est également nulle (la partie positive compense exactement la partie négative), donc la valeur moyenne vaut aussi 0.

- C'est pourquoi on caractérise une tension alternative par sa **valeur efficace**

$$U_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \approx 8,49 \text{ V}, \text{ et non par sa valeur moyenne, qui est nulle.}$$

Réponse. a) 0 · b) 0 ; on utilise la valeur efficace ($\approx 8,49 \text{ V}$).

Correction de l'exercice 10 - Aire entre deux bornes et signe

a) Primitive : $F(t) = \frac{t^2}{2} - 2t.$

$$\int_0^4 (t-2) dt = \left[\frac{t^2}{2} - 2t \right]_0^4 = (8 - 8) - 0 = 0$$

b) L'intégrale est nulle car f est négative sur $[0; 2]$ et positive sur $[2; 4]$: les deux parts se compensent.

$$\text{— Aire sous l'axe : } \left| \int_0^2 (t-2) dt \right| = |(2-4) - 0| = 2.$$

- Aire au-dessus : $\int_2^4 (t-2) dt = (8-8) - (2-4) = 2$.
 - **Aire géométrique totale** : $2 + 2 = 4$ unités d'aire.
 - Leçon : intégrale et aire ne coïncident que pour une fonction **positive**.
- Réponse.** a) 0 · b) aire géométrique = 4.

Correction de l'exercice 11 - Problème : énergie consommée

- a) L'énergie est l'**intégrale** de la puissance :
- Primitive : $P(t) = 400t + 30t^2$.
- $$E = \int_0^5 (400 + 60t) dt = [400t + 30t^2]_0^5 = 2\,000 + 750 = 2\,750 \text{ Wh}$$
- Soit 2,75 kWh.
- b) Puissance moyenne : $m = \frac{E}{5-0} = \frac{2\,750}{5} = 550 \text{ W}$.
- Contrôle : la puissance varie linéairement de 400 à 700 W, sa moyenne est donc $\frac{400+700}{2} = 550 \text{ W}$. Cohérent.

Réponse. a) 2 750 Wh = 2,75 kWh · b) 550 W.

Correction de l'exercice 12 - Problème : débit variable

- a) Le volume est l'intégrale du débit.
- Primitive : $D(t) = 30t - t^2$.
- $$V = \int_0^{10} (30 - 2t) dt = [30t - t^2]_0^{10} = 300 - 100 = 200 \text{ L}$$
- b) Débit moyen : $\frac{200}{10} = 20 \text{ L/min}$.
- Contrôle : le débit décroît linéairement de 30 à 10, sa moyenne vaut $\frac{30+10}{2} = 20 \text{ L/min}$.
- c) On cherche x tel que $30x - x^2 = 100$, soit $x^2 - 30x + 100 = 0$.
- Discriminant : $\Delta = 900 - 400 = 500$, $\sqrt{500} \approx 22,36$.
 - Racines : $x = \frac{30 \pm 22,36}{2}$, soit $x_1 \approx 3,82$ et $x_2 \approx 26,18$.
 - Seule $x_1 \approx 3,82$ appartient à $[0; 10]$: la moitié du volume est pompée au bout d'environ 3,8 minutes.
 - Cohérent : le débit étant plus élevé au début, la moitié du volume passe avant la moitié du temps.

Réponse. a) 200 L · b) 20 L/min · c) au bout d'environ 3,8 min.

Correction de l'exercice 13 - Intégrale d'une exponentielle

La fonction exponentielle est sa propre dérivée, donc $F(t) = e^t$ est une primitive de $f(t) = e^t$. On applique la formule $\int_a^b f = F(b) - F(a)$:

$$\int_0^2 e^t dt = [e^t]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1 \approx 6,389$$

La fonction exponentielle est positive : cette intégrale est l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $t = 0$ et $t = 2$.

Contrôle par rectangles : la fonction est croissante, donc l'aire est comprise entre

$2 \times e^0 = 2$ et $2 \times e^2 \approx 14,8$.

Réponse. $e^2 - 1 \approx 6,389$ unités d'aire.

Correction de l'exercice 14 - Puissance moyenne d'une machine

a) Une primitive de $3t^2 + 2$ est $t^3 + 2t$ (on vérifie en dérivant). Donc

$$W = [t^3 + 2t]_0^2 = (8 + 4) - 0 = 12 \text{ kWh}$$

b) La valeur moyenne d'une fonction sur $[a; b]$ est l'intégrale divisée par la longueur de l'intervalle :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2-0} \int_0^2 P(t) dt = \frac{12}{2} = 6 \text{ kW}$$

C'est la puissance constante qui consommerait la même énergie en 2 heures. **Contrôle :** elle est bien comprise entre $P(0) = 2 \text{ kW}$ et $P(2) = 14 \text{ kW}$.

Réponse. a) $W = 12 \text{ kWh}$ · b) 6 kW .

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : aire et valeur moyenne

a) $f(t) = -t(t-4) = t(4-t)$: sur $[0; 4]$, les deux facteurs t et $4-t$ sont positifs, donc $f(t) \geq 0$.

b) Primitive : $F(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2$.

$$\int_0^4 f = \left[-\frac{t^3}{3} + 2t^2 \right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{-64+96}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,667$$

c) Valeur moyenne : $m = \frac{1}{4} \times \frac{32}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,667$.

- Maximum de f : le sommet de la parabole est en $t = 2$, et $f(2) = -4 + 8 = 4$.
- La valeur moyenne ($\approx 2,67$) vaut donc les deux tiers du maximum (4) : c'est une propriété générale des arches de parabole.

Réponse. a) $f(t) = t(4-t) \geq 0$ · b) $\frac{32}{3} \approx 10,667$ · c) $m = \frac{8}{3} \approx 2,667$, soit $\frac{2}{3}$ du maximum.