

**Plaquette 3 - Aires : sous une courbe,
entre deux courbes, sous l'axe**
Calcul intégral — Terminale STI2D
Corrections détaillées

Boîte à outils**Aires et intégrales.**

- Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, l'aire du domaine sous la courbe, en **unités d'aire**, vaut

$$A = \int_a^b f(t) dt$$

- Si $f \leq 0$ sur $[a; b]$, l'intégrale est négative et l'aire vaut

$$A = - \int_a^b f(t) dt$$

- Si f **change de signe**, on découpe l'intervalle aux points d'annulation et on additionne les aires, chacune prise positivement.
- **Aire entre deux courbes.** Si $f \geq g$ sur $[a; b]$, l'aire comprise entre les deux courbes vaut

$$A = \int_a^b (f(t) - g(t)) dt$$

- **Bornes** : ce sont les abscisses des points d'intersection, obtenues en résolvant $f(x) = g(x)$.
- **Unité d'aire** : si une unité vaut p cm sur l'axe des abscisses et q cm sur celui des ordonnées, alors $1 \text{ u.a.} = pq \text{ cm}^2$.
- **Symétrie** : pour une fonction **paire**, $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$; pour une fonction **impaire**, $\int_{-a}^a f = 0$.
- **Contrôle systématique** : une aire est toujours **positive**. Un résultat négatif signale soit une fonction sous l'axe, soit une inversion des deux courbes.

Correction de l'exercice 1 - Une aire triangulaire

Par le calcul. Une primitive de $3t$ est $\frac{3t^2}{2}$.

$$\int_0^4 3t dt = \left[\frac{3t^2}{2} \right]_0^4 = \frac{3 \times 16}{2} - 0 = 24$$

Par la géométrie. La fonction $t \mapsto 3t$ est positive sur $[0; 4]$, et sa courbe est une droite passant par l'origine.

- Le domaine sous la courbe est un **triangle rectangle** de base 4 (sur l'axe des abscisses) et de hauteur $f(4) = 12$.
- Aire : $\frac{4 \times 12}{2} = 24$ unités d'aire.
- Les deux méthodes concordent — c'est le contrôle à faire systématiquement quand la fonction est affine.

Réponse. 24 unités d'aire.

Correction de l'exercice 2 - Une aire sous une parabole

Étape 1 — signe de f . $f(t) = 4 - t^2$ s'annule en $t = -2$ et $t = 2$, et $f(0) = 4 > 0$.

— La fonction est donc **positive** sur tout $[-2 ; 2]$: l'aire est égale à l'intégrale.

Étape 2 — calcul.

$$A = \int_{-2}^2 (4 - t^2) dt = \left[4t - \frac{t^3}{3} \right]_{-2}^2$$

— En $t = 2$: $8 - \frac{8}{3} = \frac{24 - 8}{3} = \frac{16}{3}$.

— En $t = -2$: $-8 + \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$.

— $A = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,667$ unités d'aire.

— **Contrôle** : le domaine est inscrit dans un rectangle de largeur 4 et de hauteur 4, donc d'aire 16. La valeur 10,67 en représente les deux tiers, ce qui est plausible pour un arc de parabole.

Réponse. $\frac{32}{3} \approx 10,667$ unités d'aire.

Correction de l'exercice 3 - Convertir en centimètres carrés

Valeur d'une unité d'aire. L'unité d'aire est l'aire du rectangle construit sur les deux unités des axes.

$$1 \text{ u.a.} = 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$$

Conversion.

— $A = \frac{32}{3} \times 6 = \frac{192}{3} = 64 \text{ cm}^2$.

— **Piège** : multiplier par $2 + 3 = 5$ au lieu de $2 \times 3 = 6$. Une aire se convertit en multipliant les deux échelles, pas en les additionnant.

— **Rédaction attendue** : toute aire lue dans un repère doit être donnée en unités d'aire **ou** convertie, jamais laissée sans unité.

Réponse. 64 cm^2 .

Correction de l'exercice 4 - Une fonction négative

a) Une primitive de $t - 5$ est $\frac{t^2}{2} - 5t$.

$$\int_1^4 (t - 5) dt = \left[\frac{t^2}{2} - 5t \right]_1^4$$

— En $t = 4$: $8 - 20 = -12$.

— En $t = 1$: $0,5 - 5 = -4,5$.

— L'intégrale vaut $-12 - (-4,5) = -7,5$.

b) Sur $[1 ; 4]$, on a $t \leq 4 < 5$, donc $f(t) = t - 5$ est **négative**. L'aire est l'opposé de l'intégrale.

$$A = - \int_1^4 f(t) dt = 7,5 \text{ unités d'aire}$$

— **Contrôle géométrique** : le domaine est un trapèze de bases $|f(1)| = 4$ et $|f(4)| = 1$, de hauteur 3. Son aire vaut $\frac{(4 + 1) \times 3}{2} = 7,5$. Cohérent.

— **À retenir** : une intégrale peut être négative, jamais une aire.

Réponse. a) $-7,5$ · b) $7,5$ unités d'aire.

Correction de l'exercice 5 - Une fonction qui change de signe

a) $f(t) = t^2 - 4$ s'annule pour $t^2 = 4$, soit $t = 2$ sur $[0; 3]$.

— Sur $[0; 2]$: $t^2 < 4$, donc f est **négative**.

— Sur $[2; 3]$: $t^2 > 4$, donc f est **positive**.

b) Une primitive est $\frac{t^3}{3} - 4t$.

$$\int_0^3 (t^2 - 4) dt = \left[\frac{t^3}{3} - 4t \right]_0^3 = (9 - 12) - 0 = -3$$

c) On découpe en $t = 2$ et on prend chaque morceau **positivement**.

— $\int_0^2 f = \left(\frac{8}{3} - 8 \right) - 0 = -\frac{16}{3}$, donc la première aire vaut $\frac{16}{3} \approx 5,333$.

— $\int_2^3 f = (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = -3 + \frac{16}{3} = \frac{7}{3} \approx 2,333$, aire déjà positive.

— Aire totale : $\frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3} \approx 7,667$ unités d'aire.

— **Comparaison éclairante** : l'intégrale vaut -3 et l'aire $\frac{23}{3} \approx 7,67$. Les deux morceaux se compensent partiellement dans l'intégrale, jamais dans l'aire.

Réponse. a) négative sur $[0; 2]$, positive sur $[2; 3]$ · b) -3 · c) $\frac{23}{3} \approx 7,667$ u.a.

Correction de l'exercice 6 - Entre deux droites

Étape 1 — laquelle est au-dessus ? On compare les deux expressions.

— $(2x + 1) - (x - 1) = x + 2$.

— Sur $[0; 3]$, $x + 2$ est strictement positif : la droite $y = 2x + 1$ est donc **au-dessus** sur tout l'intervalle.

Étape 2 — intégrer la différence.

$$A = \int_0^3 ((2x + 1) - (x - 1)) dx = \int_0^3 (x + 2) dx$$

— Primitive : $\frac{x^2}{2} + 2x$.

— $A = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^3 = \frac{9}{2} + 6 = 10,5$ unités d'aire.

— **Contrôle géométrique** : le domaine est un trapèze de bases 2 (écart en $x = 0$) et 5 (écart en $x = 3$), de hauteur 3 : $\frac{(2 + 5) \times 3}{2} = 10,5$. Cohérent.

— **Remarque essentielle** : on n'a jamais eu besoin de savoir si les droites sont au-dessus ou en dessous de l'axe des abscisses. Seul leur **écart** compte.

Réponse. $10,5$ unités d'aire.

Correction de l'exercice 7 - Entre une parabole et une droite

Étape 1 — points d'intersection. On résout $4 - x^2 = x + 2$.

— $0 = x^2 + x - 2$.

— On factorise : $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, ce qu'on vérifie en développant.

— Les solutions sont $x = 1$ et $x = -2$: ce sont les bornes d'intégration.

Étape 2 — laquelle est au-dessus ? On teste en $x = 0$, qui est entre -2 et 1 .

— Parabole : $4 - 0 = 4$. Droite : $0 + 2 = 2$.

— La **parabole** est au-dessus sur $[-2; 1]$.

Étape 3 — intégrer la différence.

$$A = \int_{-2}^1 ((4 - x^2) - (x + 2)) dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$$

— Primitive : $2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.

— En $x = 1$: $2 - 0,5 - \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \approx 1,167$.

— En $x = -2$: $-4 - 2 + \frac{8}{3} = -\frac{10}{3} \approx -3,333$.

— $A = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{7+20}{6} = \frac{27}{6} = 4,5$ unités d'aire.

— **Ordre de travail à respecter** : bornes d'abord, position relative ensuite, calcul enfin. Intervertir les deux courbes donnerait $-4,5$, un résultat impossible pour une aire.

Réponse. 4,5 unités d'aire.

Correction de l'exercice 8 - Une parabole entièrement sous l'axe

Étape 1 — les bornes. La courbe coupe l'axe quand $x^2 - 9 = 0$, soit $x = -3$ et $x = 3$.

Étape 2 — le signe. Entre ces deux valeurs, par exemple en $x = 0$, on a $0 - 9 = -9 < 0$: la fonction est **négative** sur $[-3; 3]$.

Étape 3 — l'intégrale.

$$\int_{-3}^3 (x^2 - 9) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x \right]_{-3}^3$$

— En $x = 3$: $9 - 27 = -18$.

— En $x = -3$: $-9 + 27 = 18$.

— L'intégrale vaut $-18 - 18 = -36$.

Étape 4 — l'aire.

— $A = -(-36) = 36$ unités d'aire.

— **Contrôle par la symétrie** : la fonction est paire, donc $\int_{-3}^3 = 2 \int_0^3 = 2 \times (-18) = -36$. Cohérent, et deux fois moins de calcul.

Réponse. 36 unités d'aire.

Correction de l'exercice 9 - Utiliser la parité

a) La fonction $x \mapsto x^3 + 5x$ est **impaire** : remplacer x par $-x$ change le signe de chaque terme.

— Sur un intervalle symétrique, les aires des deux moitiés se compensent exactement.

$$\int_{-1}^1 (x^3 + 5x) dx = 0$$

— Vérification : $\left[\frac{x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2} \right) = 0$. Correct.

b) La fonction $x \mapsto 3x^2 + 2$ est **paire** : les deux moitiés apportent la même contribution.

$$\int_{-1}^1 (3x^2 + 2) dx = 2 \int_0^1 (3x^2 + 2) dx = 2[x^3 + 2x]_0^1$$

$$= 2 \times (1 + 2) = 6.$$

— **Gain de temps** : la parité divise le travail par deux et évite les erreurs de signe sur la borne négative. Il faut seulement penser à la vérifier avant de l'utiliser.

Réponse. a) 0 · b) 6.

Correction de l'exercice 10 - Comparer deux aires sans calcul

a) Pour $x \in [0; 1]$, on écrit la différence sous forme factorisée.

$$f(x) - g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x).$$

— Sur $[0; 1]$: $x^2 \geq 0$ et $1 - x \geq 0$, donc le produit est **positif**.

— Donc $f(x) \geq g(x)$ sur $[0; 1]$: la courbe de f est au-dessus.

b) L'intégrale d'une fonction positive est positive : l'intégrale est donc **positive**, sans aucun calcul.

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0,083$$

— Le signe positif est confirmé.

— **Propriété utilisée** : si $f \geq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$. C'est la **croissance de l'intégrale**, qui permet de comparer sans calculer.

Réponse. a) $f \geq g$ car $x^2(1 - x) \geq 0$ · b) intégrale positive, égale à $\frac{1}{12}$.

Correction de l'exercice 11 - Déterminer une borne à partir d'une aire

Sur $[0; a]$ avec $a > 0$, la fonction $t \mapsto t$ est positive : l'aire est égale à l'intégrale.

$$A = \int_0^a t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^a = \frac{a^2}{2}$$

Résolution.

$$\frac{a^2}{2} = 8, \text{ donc } a^2 = 16.$$

— Les solutions sont $a = 4$ et $a = -4$; la condition $a > 0$ ne retient que $a = 4$.

Contrôle géométrique.

— Le domaine est un triangle rectangle de base 4 et de hauteur $f(4) = 4$, d'aire $\frac{4 \times 4}{2} = 8$. Cohérent.

— **Attention** : une équation du second degré a en général deux solutions. C'est le contexte — ici une borne positive — qui en élimine une.

Réponse. $a = 4$.

Correction de l'exercice 12 - Exponentielle et tangente

Étape 1 — position relative. On sait que pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$, la droite $y = x + 1$ étant la **tangente** à la courbe de l'exponentielle au point d'abscisse 0.

— La courbe est donc au-dessus de la droite sur $[0; 1]$ (elles se touchent seulement en $x = 0$).

Étape 2 — intégrer la différence.

$$A = \int_0^1 (e^x - x - 1) dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1$$

- En $x = 1$: $e - 0,5 - 1 = e - 1,5$.
- En $x = 0$: $e^0 - 0 - 0 = 1$.
- $A = e - 1,5 - 1 = e - 2,5 \approx 0,218$ unité d'aire.
- **Contrôle de vraisemblance** : sur $[0; 1]$, l'écart entre la courbe et sa tangente reste faible (au maximum $e - 2 \approx 0,72$ en $x = 1$). Une aire de 0,22 est donc plausible.

Réponse. $e - 2,5 \approx 0,218$ unité d'aire.

Correction de l'exercice 13 - Une alternance de sinusoïde

Une primitive de $\sin(t)$ est $-\cos(t)$.

a) **Calcul.**

$$\int_0^\pi \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

b) **Calcul.**

$$\int_0^{2\pi} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$

c) Sur $[\pi; 2\pi]$, la fonction sinus est **négative** : son intégrale vaut -2 , et l'aire correspondante 2.

- Aire totale : $2 + 2 = 4$ unités d'aire.
- **Lecture physique** : c'est exactement pourquoi la valeur moyenne d'une tension alternative est nulle sur une période, alors que cette tension transporte bien de l'énergie. On ne mesure donc jamais un signal alternatif par sa moyenne, mais par sa **valeur efficace**.

Réponse. a) 2 · b) 0 · c) 4 unités d'aire.

Correction de l'exercice 14 - Lire une aire sur un graphique

Sur chaque intervalle $[k; k + 1]$, la fonction est croissante : elle est donc comprise entre $f(k)$ et $f(k + 1)$.

- Rectangle **inférieur** : hauteur $f(k)$; rectangle **supérieur** : hauteur $f(k + 1)$. Chaque rectangle a une largeur de 1.

Somme inférieure (valeurs de $t = 0$ à $t = 5$).

- $2,0 + 2,6 + 3,4 + 4,1 + 4,7 + 5,2 = 22,0$.

Somme supérieure (valeurs de $t = 1$ à $t = 6$).

- $2,6 + 3,4 + 4,1 + 4,7 + 5,2 + 5,6 = 25,6$.

Encadrement.

$$22,0 \leq \int_0^6 f(t) dt \leq 25,6$$

- Une valeur approchée raisonnable est le milieu, $\frac{22,0 + 25,6}{2} = 23,8$.
- **Précision** : l'amplitude de l'encadrement vaut $25,6 - 22,0 = 3,6$, c'est-à-dire $f(6) - f(0) = 5,6 - 2,0$. Diviser la largeur des rectangles par deux diviserait cette amplitude par deux.

Réponse. $22,0 \leq \int_0^6 f(t) dt \leq 25,6$.

Correction de l'exercice 15 - Aire d'un domaine à trois côtés

Identifier les bornes. Le domaine est fermé par trois lignes.

- À gauche, la courbe et l'axe se rencontrent en $x = 0$: c'est la borne inférieure.
- À droite, la droite $x = 3$: c'est la borne supérieure.

Signe. Sur $[0; 3]$, $x^2 \geq 0$: l'aire est égale à l'intégrale.

$$A = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{3} = 9 \text{ unités d'aire}$$

- **Contrôle** : le domaine est inscrit dans le rectangle $[0; 3] \times [0; 9]$, d'aire 27. L'aire sous la parabole en représente le tiers, ce qui est la propriété classique de la parabole.
- **Ce qu'il faut repérer dans l'énoncé** : quand une borne n'est pas donnée explicitement, elle vient d'une intersection — ici celle de la courbe avec l'axe.

Réponse. 9 unités d'aire.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : la section d'une pièce profilée

a) On résout $9 - x^2 = 5$.

- $x^2 = 4$, donc $x = -2$ et $x = 2$.

b) Sur $[-2; 2]$, la courbe est au-dessus de la droite (en $x = 0$: $9 > 5$). On intègre la différence.

$$A = \int_{-2}^2 ((9 - x^2) - 5) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$$

- La fonction est paire, donc $A = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2$.

$$= 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 2 \times \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,667.$$

- L'unité valant 1 cm sur chaque axe, 1 u.a. = 1 cm² : l'aire vaut environ 10,667 cm².

c) On calcule le volume, puis la masse.

$$\text{Volume} : A \times 4 = \frac{32}{3} \times 4 = \frac{128}{3} \approx 42,667 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Masse} : 42,667 \times 2,7 \approx 115,2 \text{ g}.$$

d) Avec un bord inférieur à la hauteur h , les intersections vérifient $9 - x^2 = h$, soit $x^2 = 9 - h$ et $x = \pm\sqrt{9 - h}$. Posons $b = \sqrt{9 - h}$.

- L'aire devient $\int_{-b}^b (9 - x^2 - h) dx = 2 \left[(9 - h)x - \frac{x^3}{3} \right]_0^b = 2 \left(b^3 - \frac{b^3}{3} \right) = \frac{4b^3}{3}$, puisque $(9 - h)b = b^3$.

- Avec $h = 5$: $b = 2$ et l'on retrouve bien $\frac{4 \times 8}{3} = \frac{32}{3}$. La formule est validée.

$$\text{On veut } \frac{4b^3}{3} = 0,9 \times \frac{32}{3}, \text{ soit } b^3 = 0,9 \times 8 = 7,2, \text{ donc } b = \sqrt[3]{7,2} \approx 1,931.$$

$$\text{Enfin } h = 9 - b^2 \approx 9 - 3,729 = 5,271, \text{ soit environ } 5,3 \text{ cm}.$$

- **Lecture industrielle** : remonter le bord de 2,7 mm seulement suffit à retirer 10 % de matière. Près du sommet de la parabole, le profil est très plat : une petite variation de hauteur y emporte beaucoup de largeur.

Réponse. a) $x = -2$ et $x = 2$ · b) $\frac{32}{3} \approx 10,667 \text{ cm}^2$ · c) environ 115,2 g · d) $h \approx 5,3 \text{ cm}$.