

## Plaquette 5 - Applications : énergie, charge, volumes et signaux

### Calcul intégral — Terminale STI2D

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

Ce que l'intégrale cumule.

| Grandeur $f(t)$                 | Son intégrale      | Unité |
|---------------------------------|--------------------|-------|
| vitesse $v$ (m/s)               | distance parcourue | m     |
| débit $D$ (L/min)               | volume écoulé      | L     |
| puissance $p$ (W)               | énergie            | J     |
| intensité $i$ (A)               | charge électrique  | C     |
| force $F(x)$ (N)                | travail            | J     |
| masse linéique $\lambda$ (kg/m) | masse              | kg    |

$$\text{cumul entre } a \text{ et } b = \int_a^b f(t) dt$$

— **Valeur moyenne** : la grandeur constante produisant le même cumul.

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \quad \text{donc} \quad \text{cumul} = \mu \times (b-a)$$

— **Primitives utiles** :  $t^n \rightarrow \frac{t^{n+1}}{n+1}$ ,  $e^{at} \rightarrow \frac{1}{a}e^{at}$ ,  $\sin(\omega t) \rightarrow -\frac{\cos(\omega t)}{\omega}$ ,  $\cos(\omega t) \rightarrow \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$ .

— **Fonction définie par morceaux** : on découpe l'intégrale aux points de raccord (relation de Chasles).

— **Vigilance sur les unités**. Les bornes et la grandeur doivent être exprimées dans des unités cohérentes : une puissance en watts intégrée sur des **secondes** donne des joules, sur des **heures** des watts-heures. C'est la première chose à vérifier.

— **Contrôle systématique** : comparer le résultat au produit (valeur typique)  $\times$  (durée). Un ordre de grandeur faux se détecte ainsi immédiatement.

#### Correction de l'exercice 1 - D'une vitesse à une distance

a) La distance est l'intégrale de la vitesse.

$$d = \int_0^4 3t^2 dt = [t^3]_0^4 = 64 - 0 = 64 \text{ m}$$

b) **Valeur moyenne**.

$$\mu = \frac{1}{4-0} \times 64 = 16 \text{ m/s}$$

— **Contrôle** : la vitesse passe de  $v(0) = 0$  à  $v(4) = 48$  m/s. La moyenne 16 m/s est bien dans cet intervalle.

— **Interprétation** : un mobile roulant à 16 m/s constants pendant 4 s parcourrait les mêmes 64 m. La moyenne n'est pas  $\frac{0+48}{2} = 24$  m/s, parce que la vitesse reste longtemps faible avant d'augmenter brusquement.

**Réponse.** a) 64 m · b) 16 m/s.

## Correction de l'exercice 2 - D'un débit à un volume

a)  $D$  est une fonction affine décroissante.

- $D(0) = 20$  L/min et  $D(8) = 20 - 12 = 8$  L/min.
- Le minimum sur  $[0; 8]$  est donc  $8 > 0$  : le débit reste positif, le modèle est physiquement acceptable.

b) **Calcul.**

$$V = \int_0^8 (20 - 1,5t) dt = [20t - 0,75t^2]_0^8$$

- En  $t = 8$  :  $160 - 0,75 \times 64 = 160 - 48 = 112$ .
- $V = 112$  litres.
- **Contrôle par la géométrie** : le débit étant affine, le domaine est un trapèze de bases 20 et 8, de hauteur 8 :  $\frac{(20 + 8) \times 8}{2} = 112$ . Cohérent.
- **Remarque sur le modèle** : au-delà de  $t \approx 13,3$  min, le débit deviendrait négatif, ce qui n'a pas de sens. La vérification du a) n'est donc pas une formalité.

**Réponse.** a)  $D(8) = 8 > 0$  · b) 112 litres.

## Correction de l'exercice 3 - Une puissance par paliers

La puissance est constante par morceaux : on découpe l'intégrale en  $t = 2$  (relation de Chasles).

$$E = \int_0^2 1\,500 dt + \int_2^6 900 dt$$

- Premier palier :  $1\,500 \times 2 = 3\,000$  W·h.
- Second palier :  $900 \times 4 = 3\,600$  W·h.
- Total :  $6\,600$  W·h, soit **6,6 kW·h**.

**Puissance moyenne.**

- $\mu = \frac{6\,600}{6} = 1\,100$  W.
- **Vigilance sur les unités** : le temps a été compté en **heures**, donc l'énergie sort en watts-heures. En comptant en secondes, on obtiendrait  $6\,600 \times 3\,600 = 23,76$  MJ — la même énergie, dans une autre unité.

**Réponse.** 6,6 kW·h (puissance moyenne 1 100 W).

## Correction de l'exercice 4 - Charge électrique

La charge est l'intégrale de l'intensité.

$$Q = \int_0^5 (2 - 0,4t) dt = [2t - 0,2t^2]_0^5$$

- En  $t = 5$  :  $10 - 0,2 \times 25 = 10 - 5 = 5$ .
- $Q = 5$  coulombs.

**Contrôle.**

- $i(0) = 2$  A et  $i(5) = 2 - 2 = 0$  A : l'intensité décroît linéairement jusqu'à s'annuler.
- Le domaine est un triangle de base 5 et de hauteur 2, d'aire  $\frac{5 \times 2}{2} = 5$ . Cohérent.
- **Lecture physique** : l'intensité s'annulant exactement en  $t = 5$  s, le condensateur est alors complètement déchargé. Intégrer au-delà donnerait une charge négative, dépourvue de sens ici.

**Réponse.**  $Q = 5 \text{ C}$ .

### Correction de l'exercice 5 - Travail d'une force variable

Le travail d'une force variable est l'intégrale de la force le long du déplacement.

$$W = \int_0^3 (200 + 50x) dx = [200x + 25x^2]_0^3$$

- En  $x = 3$  :  $600 + 25 \times 9 = 600 + 225 = 825$ .
- $W = 825$  joules.

**Contrôle par la valeur moyenne.**

- $F$  étant affine, sa valeur moyenne est celle du milieu :  $F(1,5) = 200 + 75 = 275 \text{ N}$ .
- $W = 275 \times 3 = 825 \text{ J}$ . Cohérent.
- **Pourquoi une intégrale ?** La formule  $W = F \times d$  ne vaut que pour une force **constante**. Dès que la force varie, il faut cumuler, c'est-à-dire intégrer — ici, utiliser  $F(0) = 200 \text{ N}$  donnerait  $600 \text{ J}$ , soit  $27 \%$  d'erreur.

**Réponse.**  $W = 825 \text{ J}$ .

### Correction de l'exercice 6 - Chaleur dégagée par un composant

Une primitive de  $e^{at}$  est  $\frac{1}{a}e^{at}$ , avec  $a = -0,1$ , donc  $\frac{1}{a} = -10$ .

- Une primitive de  $p$  est donc  $P(t) = -8\,000 e^{-0,1t}$ .
- Vérification :  $P'(t) = -8\,000 \times (-0,1)e^{-0,1t} = 800 e^{-0,1t}$ . Correct.

$$E = \int_0^{20} 800 e^{-0,1t} dt = [-8\,000 e^{-0,1t}]_0^{20} = -8\,000 e^{-2} + 8\,000$$

- $e^{-2} \approx 0,135\,335$ , donc  $E \approx 8\,000 \times 0,864\,665 \approx 6\,917 \text{ J}$ .

**Puissance moyenne.**

- $\mu = \frac{6\,917}{20} \approx 346 \text{ W}$ , à comparer aux  $800 \text{ W}$  du départ.
- **Dimensionnement** : c'est cette énergie de  $6,9 \text{ kJ}$  que le radiateur doit évacuer. Se fonder sur la puissance initiale ( $800 \times 20 = 16\,000 \text{ J}$ ) surdimensionnerait le dissipateur de plus du double.

**Réponse.**  $E \approx 6\,917 \text{ J}$ .

### Correction de l'exercice 7 - Consommation d'un moteur

a) **Calcul.**

$$V = \int_0^{10} (6 - 0,2t) dt = [6t - 0,1t^2]_0^{10}$$

- En  $t = 10$  :  $60 - 0,1 \times 100 = 60 - 10 = 50$ .
- $V = 50$  litres.

b) **Valeur moyenne.**

$$\mu = \frac{1}{10} \times 50 = 5 \text{ L/h}$$

- **Contrôle** : la consommation passe de  $6$  à  $4 \text{ L/h}$ . La fonction étant affine, la moyenne est celle du milieu :  $c(5) = 6 - 1 = 5 \text{ L/h}$ . Cohérent.
- **Interprétation** : le moteur se rode, sa consommation baisse d'un tiers sur la mission. Un calcul fondé sur la seule valeur initiale annoncerait  $60 \text{ L}$  au lieu de  $50$ , soit une réserve surestimée de  $20 \%$ .

**Réponse.** a) 50 L · b) 5 L/h.

### Correction de l'exercice 8 - Un réservoir qui fuit

a) Le débit net est la différence entre l'entrée et la fuite.

$$D(t) = 30 - 2t$$

—  $D(0) = 30$  L/min et  $D(10) = 30 - 20 = 10$  L/min.

—  $D$  est décroissante et son minimum sur  $[0; 10]$  vaut  $10 > 0$  : le débit net reste positif, le réservoir se remplit tout du long.

b) **Calcul.**

$$V = \int_0^{10} (30 - 2t) dt = [30t - t^2]_0^{10} = 300 - 100 = 200 \text{ L}$$

c) Le remplissage s'arrête quand le débit net s'annule.

—  $30 - 2t = 0$  donne  $t = 15$  minutes.

— À cet instant, le volume vaut  $[30t - t^2]_0^{15} = 450 - 225 = 225$  L : c'est le volume **maximal** atteint.

— Au-delà, la fuite l'emporte et le niveau redescend.

— **Lecture** : le réservoir gagne 200 L en 10 min, mais seulement 25 L de plus dans les cinq minutes suivantes. Le remplissage s'essouffle bien avant de s'arrêter.

**Réponse.** a)  $D(t) = 30 - 2t$ , positif jusqu'à  $t = 15$  · b) 200 L · c) à  $t = 15$  min, pour un volume maximal de 225 L.

### Correction de l'exercice 9 - Un signal triangulaire

On découpe en  $t = 0,5$  (relation de Chasles).

**Premier morceau.**

$$- \int_0^{0,5} 12t dt = [6t^2]_0^{0,5} = 6 \times 0,25 = 1,5.$$

**Second morceau.**

$$- \int_{0,5}^1 (12 - 12t) dt = [12t - 6t^2]_{0,5}^1 = (12 - 6) - (6 - 1,5) = 6 - 4,5 = 1,5.$$

**Total et moyenne.**

$$- \int_0^1 u(t) dt = 1,5 + 1,5 = 3.$$

$$- \mu = \frac{1}{1-0} \times 3 = 3 \text{ V.}$$

— **Contrôle géométrique** : le signal dessine un triangle de base 1 et de hauteur  $u(0,5) = 6$  V, d'aire  $\frac{1 \times 6}{2} = 3$ . Cohérent.

— **Formule à retenir** : la valeur moyenne d'un signal triangulaire vaut la **moitié** de son amplitude, ici  $\frac{6}{2} = 3$  V.

**Réponse.**  $\mu = 3$  V.

### Correction de l'exercice 10 - Un signal en dents de scie

$$\mu = \frac{1}{1-0} \int_0^1 10t dt = [5t^2]_0^1 = 5 \text{ V}$$

**Comparaison.**

— La valeur maximale est  $u(1) = 10$  V, atteinte juste avant la retombée.

- La moyenne vaut exactement la moitié du maximum.
- **Généralisation** : pour tout signal **affine croissant** partant de 0, la moyenne est la moitié du maximum. C'est la même propriété que pour le signal triangulaire, et elle tient au fait que le domaine est un triangle.
- **Contraste avec la sinusoïde** : pour  $A \sin(\omega t)$ , la moyenne sur une demi-période vaut  $\frac{2A}{\pi} \approx 0,64A$ , et non  $0,5A$ . La forme du signal change la moyenne, pas seulement son amplitude.

**Réponse.**  $\mu = 5 \text{ V}$ , soit la moitié de la valeur maximale.

### Correction de l'exercice 11 - Production photovoltaïque d'une journée

a) Une primitive de  $\sin(\omega t)$  est  $-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}$ , avec ici  $\omega = \frac{\pi}{12}$ , donc  $\frac{1}{\omega} = \frac{12}{\pi}$ .

— Une primitive de  $p$  est  $P(t) = -\frac{48}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ .

$$E = \int_0^{12} 4 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) dt = \left[ -\frac{48}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) \right]_0^{12}$$

— En  $t = 12$  : l'argument vaut  $\pi$  et  $\cos(\pi) = -1$ , d'où  $+\frac{48}{\pi}$ .

— En  $t = 0$  :  $\cos(0) = 1$ , d'où  $-\frac{48}{\pi}$ .

—  $E = \frac{96}{\pi} \approx 30,56 \text{ kW}\cdot\text{h}$ .

b) **Valeur moyenne.**

$$\mu = \frac{1}{12} \times \frac{96}{\pi} = \frac{8}{\pi} \approx 2,55 \text{ kW}$$

— **Contrôle** : la puissance culmine à 4 kW à midi solaire ( $t = 6$ ). Une moyenne de 2,55 kW, soit 64 % du maximum, est cohérente avec une demi-arche de sinusoïde.

— **Lecture énergétique** : 30,6 kW·h par jour, c'est ce que consomme environ trois foyers français. Le modèle suppose une journée parfaitement dégagée : c'est un majorant.

**Réponse.** a)  $\frac{96}{\pi} \approx 30,56 \text{ kW}\cdot\text{h}$  · b)  $\frac{8}{\pi} \approx 2,55 \text{ kW}$ .

### Correction de l'exercice 12 - Masse d'une tige non homogène

La masse est l'intégrale de la masse linéique sur la longueur.

$$m = \int_0^3 (0,4 + 0,1x) dx = [0,4x + 0,05x^2]_0^3$$

— En  $x = 3$  :  $1,2 + 0,05 \times 9 = 1,2 + 0,45 = 1,65$ .

—  $m = 1,65 \text{ kg}$ .

**Contrôle.**

—  $\lambda$  varie de 0,4 à 0,7 kg/m. Une masse linéique constante donnerait entre  $0,4 \times 3 = 1,2 \text{ kg}$  et  $0,7 \times 3 = 2,1 \text{ kg}$  : la valeur 1,65 kg est bien dans cet encadrement.

—  $\lambda$  étant affine, sa moyenne est celle du milieu :  $\lambda(1,5) = 0,55 \text{ kg/m}$ , d'où  $m = 0,55 \times 3 = 1,65 \text{ kg}$ . Cohérent.

— **Ce que l'exercice illustre** : l'intégrale ne sert pas qu'au temps. Ici la variable est une **position**, et le cumul une masse.

**Réponse.**  $m = 1,65 \text{ kg}$ .

### Correction de l'exercice 13 - Exposition cumulée

a) Une primitive de  $5e^{-0,2t}$  est  $\frac{5}{-0,2}e^{-0,2t} = -25e^{-0,2t}$ .

$$\int_0^{10} 5e^{-0,2t} dt = [-25e^{-0,2t}]_0^{10} = -25e^{-2} + 25$$

—  $e^{-2} \approx 0,135335$ , donc l'exposition vaut environ  $25 - 3,383 \approx 21,62 \text{ mg}\cdot\text{h}/\text{m}^3$ .

b) On compare à la norme.

—  $21,62 < 25$  : la norme est **respectée** sur les 10 premières heures.

— Mais il faut regarder la journée entière. Sur  $[0; 24]$  :

$25 - 25e^{-4,8} \approx 25 - 0,206 = 24,79 \text{ mg}\cdot\text{h}/\text{m}^3$  — toujours sous la norme, mais de peu.

— **Point important** : l'exposition cumulée tend vers 25 quand la durée augmente, sans jamais l'atteindre. La norme est donc respectée **quelle que soit** la durée d'observation, ce qu'aucun calcul sur un intervalle fini ne pouvait garantir à lui seul.

**Réponse.** a) environ  $21,62 \text{ mg}\cdot\text{h}/\text{m}^3$  · b) oui, et même sur la journée entière (24,79).

### Correction de l'exercice 14 - Deux phases de freinage

a) On calcule la vitesse à l'instant  $t = 8$ .

—  $v(8) = 20 - 4 \times 5 = 20 - 20 = 0 \text{ m/s}$  : le véhicule est bien à l'arrêt.

b) On découpe en  $t = 3$ .

— Phase à vitesse constante :  $\int_0^3 20 dt = 20 \times 3 = 60 \text{ m}$ .

— Phase de freinage :  $\int_3^8 (32 - 4t) dt = [32t - 2t^2]_3^8$ , après avoir développé  
 $20 - 4(t - 3) = 32 - 4t$ .

— En  $t = 8$  :  $256 - 128 = 128$ . En  $t = 3$  :  $96 - 18 = 78$ .

— Distance de freinage :  $128 - 78 = 50 \text{ m}$ .

— Distance totale :  $60 + 50 = 110 \text{ m}$ .

c) **Valeur moyenne.**

$$\mu = \frac{1}{8-0} \times 110 = 13,75 \text{ m/s}$$

— **Contrôle du freinage** : le domaine est un triangle de base 5 s et de hauteur 20 m/s, d'aire  $\frac{5 \times 20}{2} = 50 \text{ m}$ . Cohérent.

— **Lecture routière** : 50 m de distance de freinage depuis 72 km/h, c'est l'ordre de grandeur réel. Doubler la vitesse initiale quadruplerait cette distance.

**Réponse.** a)  $v(8) = 0$  · b) 110 m · c) 13,75 m/s.

### Correction de l'exercice 15 - Comparer deux profils de charge

a) **Profil A.**

—  $\int_0^4 5 dt = 5 \times 4 = 20 \text{ A}\cdot\text{h}$ .

**Profil B.**

—  $\int_0^4 (10 - 2,5t) dt = [10t - 1,25t^2]_0^4 = 40 - 20 = 20 \text{ A}\cdot\text{h}$ .

b) Les deux profils apportent **exactement la même charge**, 20 A·h.

— Ils ont donc la même valeur moyenne :  $\mu = \frac{20}{4} = 5 \text{ A}$ .

- Mais le profil B commence à 10 A et finit à 0 A, alors que A reste à 5 A.
- **Discussion** : à charge égale, le profil B sollicite deux fois plus la batterie au départ — échauffement, vieillissement accéléré — mais recharge beaucoup plus vite au début (après une heure : 8,75 A·h pour B contre 5 pour A).
- **Conclusion** : l'intégrale ne suffit pas à choisir. Deux profils de même cumul peuvent avoir des effets très différents ; c'est la **forme** de la courbe qui décide, et c'est pourquoi les chargeurs réels combinent une phase à courant fort puis une phase à courant décroissant.

**Réponse.** a) 20 A·h dans les deux cas · b) même charge et même moyenne, mais des contraintes très différentes.

### Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dimensionner un stockage

a) Une primitive de  $p$  est  $-\frac{60}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)$ , puisque  $\frac{1}{\omega} = \frac{10}{\pi}$  et  $6 \times \frac{10}{\pi} = \frac{60}{\pi}$ .

$$E_p = \left[ -\frac{60}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) \right]_0^{10} = \frac{60}{\pi} + \frac{60}{\pi} = \frac{120}{\pi} \approx 38,20 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

b) - Énergie consommée :  $3 \times 10 = 30 \text{ kW} \cdot \text{h}$ .

— Excédent sur la journée :  $38,20 - 30 = 8,20 \text{ kW} \cdot \text{h}$ .

c) On résout  $p(t) > 3$ , soit  $\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) > 0,5$ .

— Sur  $[0; \pi]$ ,  $\sin(x) > 0,5$  pour  $x \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right[$ .

— Avec  $x = \frac{\pi t}{10}$  :  $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi t}{10} < \frac{5\pi}{6}$ , donc  $\frac{10}{6} < t < \frac{50}{6}$ .

— La production dépasse la consommation entre  $t \approx 1,67 \text{ h}$  et  $t \approx 8,33 \text{ h}$ .

d) On intègre l'excédent  $p(t) - 3$  sur cette phase, entre  $a = \frac{5}{3}$  et  $b = \frac{25}{3}$ .

$$E_{\text{stock}} = \int_a^b \left( 6 \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) - 3 \right) dt = \left[ -\frac{60}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) - 3t \right]_a^b$$

— Les arguments valent  $\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{5\pi}{6}$ , dont les cosinus sont  $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$  et  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

— Terme sinusoïdal :  $-\frac{60}{\pi} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{60}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60\sqrt{3}}{\pi} \approx 33,08$ .

— Terme linéaire :  $-3 \left( \frac{25}{3} - \frac{5}{3} \right) = -3 \times \frac{20}{3} = -20$ .

—  $E_{\text{stock}} \approx 33,08 - 20 = 13,08 \text{ kW} \cdot \text{h}$ .

— **Dimensionnement** : il faut une batterie d'au moins 13,1 kW·h pour absorber le pic de production, alors que l'excédent net de la journée n'est que de 8,2 kW·h.

— **Ce que l'écart signifie** : les 4,9 kW·h de différence sont ce que l'atelier consomme en début et en fin de journée, quand la production est insuffisante et qu'il faut puiser dans le stock. Dimensionner sur le bilan net seul sous-estimerait la batterie de plus d'un tiers.

**Réponse.** a)  $\frac{120}{\pi} \approx 38,20 \text{ kW} \cdot \text{h}$  · b) 30 kW·h consommés, excédent 8,20 · c) entre 1,67 h et 8,33 h · d) environ 13,08 kW·h à stocker.