

Plaquette 2 - Calculer une intégrale avec une primitive

Calcul intégral — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Primitives et calcul d'intégrales.

- F est une **primitive** de f sur un intervalle si $F' = f$ sur cet intervalle. Deux primitives de f diffèrent d'une **constante**.
- **Théorème fondamental** : si F est une primitive de f sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- La constante d'intégration **disparaît** dans la soustraction : on choisit donc la primitive la plus simple.

Primitives de référence (à k près).

$f(t)$	une primitive $F(t)$
k (constante)	kt
t^n (avec $n \neq -1$)	$\frac{t^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{t^2}$	$-\frac{1}{t}$
e^t	e^t
e^{at}	$\frac{1}{a} e^{at}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{\sin(\omega t)}{\omega}$
$\sin(\omega t)$	$-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}$

- **Linéarité** : on intègre terme à terme, et une constante multiplicative se sort de l'intégrale.

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \quad \int_a^b k f(t) dt = k \int_a^b f(t) dt$$

- **Vérification** : on peut toujours contrôler une primitive en la **dérivant**. C'est le seul contrôle qui ne coûte rien.
- **Primitive avec condition** : parmi toutes les primitives $F(t) + C$, une seule vérifie une condition du type $F(t_0) = y_0$; on détermine C en remplaçant.

Correction de l'exercice 1 - Une primitive de monôme

On cherche d'abord une primitive de $f(t) = t^2$ à l'aide de la formule du cours :

$$t^n \longrightarrow \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad \text{donc ici} \quad F(t) = \frac{t^3}{3}$$

- Vérification : $F'(t) = \frac{3t^2}{3} = t^2$. C'est bien une primitive de f .

On applique ensuite le théorème fondamental.

$$\int_0^3 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{3} - \frac{0}{3} = 9$$

- **Contrôle de vraisemblance** : sur $[0; 3]$, la fonction $t \mapsto t^2$ varie de 0 à 9. L'aire sous la courbe est donc comprise entre 0 et $3 \times 9 = 27$, et 9 tombe bien dans cet intervalle.

Réponse. 9.

Correction de l'exercice 2 - Une fonction affine

On intègre terme à terme (linéarité).

- Une primitive de $2t$ est t^2 ; une primitive de 3 est $3t$.
- Donc $F(t) = t^2 + 3t$, et on vérifie : $F'(t) = 2t + 3$.

$$\int_1^4 (2t + 3) dt = [t^2 + 3t]_1^4 = (16 + 12) - (1 + 3) = 28 - 4 = 24$$

- **Contrôle géométrique** : la fonction étant affine, l'aire sous la courbe est celle d'un trapèze de bases $f(1) = 5$ et $f(4) = 11$, de hauteur 3.
- Aire du trapèze : $\frac{(5 + 11) \times 3}{2} = \frac{48}{2} = 24$. Les deux méthodes concordent.

Réponse. 24.

Correction de l'exercice 3 - Un polynôme de degré 3

On intègre terme à terme.

$$F(t) = \frac{t^4}{4} - t^2 + t$$

- Vérification par dérivation : $F'(t) = \frac{4t^3}{4} - 2t + 1 = t^3 - 2t + 1$. Correct.

$$\int_0^2 (t^3 - 2t + 1) dt = \left[\frac{t^4}{4} - t^2 + t \right]_0^2$$

- En $t = 2$: $\frac{16}{4} - 4 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$.
- En $t = 0$: 0.
- L'intégrale vaut $2 - 0 = 2$.
- **Piège fréquent** : oublier le terme constant 1, dont la primitive est t et non 0. Une constante a bien une primitive non nulle.

Réponse. 2.

Correction de l'exercice 4 - La fonction inverse au carré

La formule du cours donne directement la primitive :

$$\frac{1}{t^2} \longrightarrow -\frac{1}{t}$$

- Vérification : la dérivée de $-t^{-1}$ est $t^{-2} = \frac{1}{t^2}$. Correct.

$$\int_1^3 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^3 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

- **Attention au signe moins** : c'est l'erreur la plus fréquente sur cette primitive. Sans lui, on trouverait $-\frac{2}{3}$, une valeur négative alors que la fonction est positive sur $[1; 3]$

— le contrôle de signe suffit à détecter la faute.

Réponse. $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 5 - Deux exponentielles

a) La fonction exponentielle est sa propre primitive.

$$\int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

— Valeur approchée : $e - 1 \approx 1,718$.

b) Pour e^{at} , la primitive est $\frac{1}{a} e^{at}$. Ici $a = 0,5$, donc $\frac{1}{a} = 2$.

$$\int_0^2 e^{0,5t} dt = [2e^{0,5t}]_0^2 = 2e^1 - 2e^0 = 2e - 2$$

— Valeur approchée : $2e - 2 \approx 3,437$.

— Vérification de la primitive : la dérivée de $2e^{0,5t}$ vaut $2 \times 0,5 \times e^{0,5t} = e^{0,5t}$. Correct.

— **Piège** : écrire $[e^{0,5t}]$ sans le facteur 2 diviserait le résultat par deux. Le coefficient $\frac{1}{a}$ compense la dérivée de l'exposant.

Réponse. a) $e - 1 \approx 1,718$ · b) $2e - 2 \approx 3,437$.

Correction de l'exercice 6 - Un cosinus

La formule du cours donne :

$$\cos(\omega t) \rightarrow \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \quad \text{donc ici} \quad F(t) = \frac{\sin(2t)}{2}$$

— Vérification : $F'(t) = \frac{2 \cos(2t)}{2} = \cos(2t)$. Correct.

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2t) dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin(0)}{2}$$

— $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\sin(0) = 0$.

— L'intégrale vaut $\frac{1}{2}$.

— **Contrôle de vraisemblance** : sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(2t)$ décroît de 1 à 0 en restant positif. L'aire est donc comprise entre 0 et $\frac{\pi}{4} \approx 0,785$, ce qui est le cas de 0,5.

Réponse. $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 7 - Un sinus

Primitive du cours, avec son signe moins :

$$\sin(\omega t) \rightarrow -\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \quad \text{donc} \quad F(t) = -\frac{\cos(3t)}{3}$$

— Vérification : $F'(t) = -\frac{-3 \sin(3t)}{3} = \sin(3t)$. Correct.

$$\int_0^{\pi/3} \sin(3t) dt = \left[-\frac{\cos(3t)}{3} \right]_0^{\pi/3} = -\frac{\cos(\pi)}{3} + \frac{\cos(0)}{3}$$

— $\cos(\pi) = -1$ et $\cos(0) = 1$.

- L'intégrale vaut $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
- **Deux signes moins à ne pas confondre** : celui de la primitive et celui de $\cos(\pi)$. Ils se combinent pour donner un résultat positif, cohérent avec une fonction positive sur l'intervalle.

Réponse. $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 8 - Vérifier une primitive

Vérification. On dérive F comme un produit, avec $u(t) = 2t - 1$ et $v(t) = e^t$.

- $u'(t) = 2$ et $v'(t) = e^t$.
- $F'(t) = u'v + uv' = 2e^t + (2t - 1)e^t$.
- On factorise par e^t : $F'(t) = (2 + 2t - 1)e^t = (2t + 1)e^t = f(t)$.
- F est donc bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Calcul de l'intégrale.

$$\int_0^1 (2t + 1)e^t dt = [(2t - 1)e^t]_0^1 = (1)e^1 - (-1)e^0 = e + 1$$

- Valeur approchée : $e + 1 \approx 3,718$.
- **Intérêt de la méthode** : on ne sait pas trouver directement une primitive de $(2t + 1)e^t$ au programme. L'énoncé la fournit, et il suffit de la **vérifier par dérivation** — c'est une question classique au bac.

Réponse. $F' = f$, et l'intégrale vaut $e + 1 \approx 3,718$.

Correction de l'exercice 9 - Une primitive avec condition

Étape 1 — toutes les primitives. On intègre terme à terme, sans oublier la constante.

- Une primitive de $3t^2$ est t^3 ; une primitive de $-4t$ est $-2t^2$.

$$F(t) = t^3 - 2t^2 + C$$

Étape 2 — utiliser la condition. On remplace t par 1.

- $F(1) = 1 - 2 + C = -1 + C$.
- La condition $F(1) = 5$ donne $-1 + C = 5$, donc $C = 6$.

Conclusion.

$$F(t) = t^3 - 2t^2 + 6$$

- Vérification : $F'(t) = 3t^2 - 4t = f(t)$, et $F(1) = 1 - 2 + 6 = 5$. Les deux conditions sont satisfaites.
- **À retenir** : il existe une infinité de primitives, mais **une seule** passe par un point donné. C'est ce qui rend les conditions initiales indispensables en physique.

Réponse. $F(t) = t^3 - 2t^2 + 6$.

Correction de l'exercice 10 - Somme de deux fonctions

La linéarité permet d'intégrer terme à terme.

- Primitive de $3t^2$: t^3 .
- Primitive de $2e^t$: $2e^t$.

$$\int_0^2 (3t^2 + 2e^t) dt = [t^3 + 2e^t]_0^2$$

- En $t = 2$: $8 + 2e^2$.
- En $t = 0$: $0 + 2e^0 = 2$.
- Différence : $8 + 2e^2 - 2 = 6 + 2e^2$.
- Valeur approchée : $2e^2 \approx 14,778$, donc l'intégrale vaut environ 20,778.
- **Piège** : ne pas oublier $e^0 = 1$. Beaucoup d'élèves écrivent 0 pour la borne inférieure et perdent le -2 .

Réponse. $6 + 2e^2 \approx 20,778$.

Correction de l'exercice 11 - Bornes symétriques

Première intégrale.

$$\int_{-2}^2 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_{-2}^2 = \frac{16}{4} - \frac{16}{4} = 4 - 4 = 0$$

Seconde intégrale.

$$\int_{-2}^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{16}{3} \approx 5,333$$

Explication.

- La fonction cube est **impaire** : elle est négative sur $[-2; 0]$ et positive sur $[0; 2]$, avec des aires exactement opposées, qui se compensent.
- La fonction carré est **paire** et toujours positive : les deux moitiés s'ajoutent au lieu de se compenser.
- **Mise en garde** : une intégrale nulle ne signifie pas que l'aire est nulle. Ici l'aire géométrique vaut $2 \times 4 = 8$ unités, alors que l'intégrale vaut 0.
- $(-2)^4 = 16$ est positif, mais $(-2)^3 = -8$ est négatif : c'est la parité de l'exposant qui décide.

Réponse. 0 et $\frac{16}{3} \approx 5,333$; la fonction cube est impaire, ses deux aires se compensent.

Correction de l'exercice 12 - Découper avant d'intégrer

On ne dispose d'aucune primitive de quotient : il faut d'abord **séparer la fraction** en deux termes intégrables.

$$\frac{t^2 + 3}{t^2} = \frac{t^2}{t^2} + \frac{3}{t^2} = 1 + \frac{3}{t^2}$$

- Primitive de $1 : t$.
- Primitive de $\frac{3}{t^2} : -\frac{3}{t}$.

$$\int_1^2 \left(1 + \frac{3}{t^2} \right) dt = \left[t - \frac{3}{t} \right]_1^2$$

- En $t = 2$: $2 - \frac{3}{2} = 0,5$.
- En $t = 1$: $1 - 3 = -2$.
- L'intégrale vaut $0,5 - (-2) = 2,5$.
- **Réflexe à acquérir** : devant un quotient, toujours essayer de le décomposer en somme. C'est presque toujours la clé dans les exercices du programme.

Réponse. 2,5.

Correction de l'exercice 13 - Trouver une borne

Étape 1 — calculer l'intégrale en fonction de a .

— Une primitive de $2t - 4$ est $t^2 - 4t$.

$$\int_0^a (2t - 4) dt = [t^2 - 4t]_0^a = a^2 - 4a$$

Étape 2 — résoudre l'équation.

- $a^2 - 4a = 0$, soit $a(a - 4) = 0$.
- Les solutions sont $a = 0$ et $a = 4$.
- Comme on cherche $a > 0$, la réponse est $a = 4$.

Interprétation.

- La fonction $t \mapsto 2t - 4$ est négative sur $[0; 2]$ et positive sur $[2; 4]$.
- Les deux aires, de 4 unités chacune, se compensent exactement : l'intégrale s'annule en $a = 4$.
- **Attention** : cette compensation ne se produit ici que parce que la fonction est affine et change de signe au milieu de l'intervalle.

Réponse. $a = 4$.

Correction de l'exercice 14 - Une intégrale avec paramètre

Étape 1 — calculer l'intégrale. Ici k est une **constante** : sa primitive est kt .

$$\int_0^1 (t + k) dt = \left[\frac{t^2}{2} + kt \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} + k \right) - 0 = \frac{1}{2} + k$$

Étape 2 — résoudre.

— $\frac{1}{2} + k = 3$, donc $k = 3 - \frac{1}{2} = 2,5$.

Vérification.

- Avec $k = 2,5$: $\int_0^1 (t + 2,5) dt = \frac{1}{2} + 2,5 = 3$. Correct.
- **Piège** : traiter k comme une variable et écrire $\frac{k^2}{2}$. La variable d'intégration est t , indiquée par le dt : tout le reste est constant.

Réponse. $k = 2,5$.

Correction de l'exercice 15 - Une fonction définie par morceaux

Le volume est l'intégrale du débit. La fonction changeant d'expression en $t = 3$, on **découpe** l'intégrale à cet endroit (relation de Chasles).

$$V = \int_0^4 f(t) dt = \int_0^3 2 dt + \int_3^4 (8 - 2t) dt$$

Premier morceau.

— $\int_0^3 2 dt = [2t]_0^3 = 6 - 0 = 6$.

Second morceau.

- Une primitive de $8 - 2t$ est $8t - t^2$.
- $\int_3^4 (8 - 2t) dt = [8t - t^2]_3^4 = (32 - 16) - (24 - 9) = 16 - 15 = 1$.

Total.

- $V = 6 + 1 = 7$ litres.
- **Contrôle de cohérence** : le débit vaut 2 L/min jusqu'à $t = 3$, puis décroît de 2 à 0 entre $t = 3$ et $t = 4$. Le second morceau est un triangle de base 1 et de hauteur 2, d'aire $\frac{1 \times 2}{2} = 1$ L. Cohérent.

Réponse. $V = 7$ litres.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : quatre intégrales et une interprétation

a) On dérive F à l'aide de la formule $(e^{at})' = a e^{at}$, avec $a = -0,2$.

- $F'(t) = -3 \times (-0,2) e^{-0,2t} = 0,6 e^{-0,2t} = i(t)$.
- F est donc bien une primitive de i sur $\mathbb{R}$.

b) La charge est l'intégrale de l'intensité.

$$Q_1 = \int_0^5 i(t) dt = [-3 e^{-0,2t}]_0^5 = -3 e^{-1} + 3$$

- $e^{-1} \approx 0,367\,879$, donc $Q_1 \approx 3 - 1,103\,638 = 1,896$ C.

c) **Calcul.**

$$Q_2 = \int_5^{10} i(t) dt = [-3 e^{-0,2t}]_5^{10} = -3 e^{-2} + 3 e^{-1}$$

- $e^{-2} \approx 0,135\,335$, donc $Q_2 \approx 1,103\,638 - 0,406\,006 = 0,698$ C.
- Comparaison : $\frac{Q_2}{Q_1} \approx \frac{0,698}{1,896} \approx 0,368$, soit exactement e^{-1} .
- La charge écoulee pendant les cinq secondes suivantes ne représente que 37 % de celle des cinq premières : le courant décroît vite.

d) La charge totale entre 0 et T vaut $3 - 3 e^{-0,2T}$.

- Quand T devient très grand, $e^{-0,2T}$ tend vers 0.
- La charge totale tend donc vers 3 **coulombs**.
- **Lecture physique** : c'est la charge complète stockée dans le circuit. Après 5 s on en a écoulé 63 %, après 10 s 87 % — le régime transitoire est pratiquement terminé au bout de quelques constantes de temps, ici $\tau = \frac{1}{0,2} = 5$ s.

Réponse. b) $Q_1 \approx 1,896$ C · c) $Q_2 \approx 0,698$ C, soit e^{-1} fois moins · d) la charge tend vers 3 C.