

Plaquette 4 - Linéarité, Chasles, valeur moyenne et encadrements

Calcul intégral — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés de l'intégrale.

— **Linéarité** :

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \int_a^b k f = k \int_a^b f$$

— **Relation de Chasles**, pour a, b, c quelconques :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

— **Inversion des bornes** : $\int_b^a f = -\int_a^b f$, et $\int_a^a f = 0$.

— **Positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ avec $a < b$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

— **Croissance** : si $f \geq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

— **Encadrement par les extrema** : si $m \leq f(t) \leq M$ sur $[a; b]$, alors

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b - a)$$

— **Valeur moyenne** de f sur $[a; b]$:

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt$$

— **Interprétation** : μ est la hauteur du rectangle de base $[a; b]$ ayant la **même aire** que le domaine sous la courbe. En physique, c'est la puissance moyenne, la tension moyenne, le débit moyen.

— **Contrôle** : la valeur moyenne est toujours comprise entre le minimum et le maximum de f sur l'intervalle.

Correction de l'exercice 1 - Recomposer par linéarité

a) La linéarité permet de séparer la somme.

$$\int_0^2 (f + g) = \int_0^2 f + \int_0^2 g = 5 + (-3) = 2$$

b) On sépare, puis on sort les coefficients.

$$\int_0^2 (2f - 3g) = 2 \int_0^2 f - 3 \int_0^2 g$$

$$= 2 \times 5 - 3 \times (-3) = 10 + 9 = 19.$$

— **Attention au double signe** : $-3 \times (-3) = +9$. C'est l'erreur la plus fréquente sur ce type de question.

— **Ce qu'il faut retenir** : la linéarité évite complètement la recherche de primitives. Au bac, une question ainsi formulée se traite en deux lignes.

Réponse. a) 2 · b) 19.

Correction de l'exercice 2 - Sortir un coefficient

On sépare les deux termes, puis on traite chacun.

$$\int_1^4 \left(\frac{h(t)}{2} + 5 \right) dt = \frac{1}{2} \int_1^4 h(t) dt + \int_1^4 5 dt$$

Premier terme.

$$- \frac{1}{2} \times 6 = 3.$$

Second terme. L'intégrale d'une constante k sur $[a; b]$ vaut $k(b - a)$: c'est l'aire d'un rectangle.

$$- \int_1^4 5 dt = 5 \times (4 - 1) = 15.$$

Total.

$$- 3 + 15 = 18.$$

— **Piège** : écrire $\int_1^4 5 dt = 5$. La largeur de l'intervalle compte : ici elle vaut 3, et le rectangle a donc une aire de 15.

Réponse. 18.

Correction de l'exercice 3 - Recoller deux intervalles

Les deux intervalles $[0; 3]$ et $[3; 5]$ se recollent en $[0; 5]$: c'est exactement la relation de Chasles.

$$\int_0^5 f = \int_0^3 f + \int_3^5 f = 7 + 4 = 11$$

- **Interprétation en aires** (si $f \geq 0$) : le domaine sur $[0; 5]$ est la réunion des deux domaines précédents, qui ne se chevauchent pas. Les aires s'additionnent.
- **Point de vigilance** : la borne de raccord doit être **commune** aux deux intégrales, et l'ordre respecté. On ne peut pas additionner $\int_0^3$ et $\int_2^5$, qui se recouvrent sur $[2; 3]$.

Réponse. 11.

Correction de l'exercice 4 - Chasles à l'envers

On écrit Chasles dans le sens direct, en coupant $[1; 4]$ en 2 :

$$\int_1^4 f = \int_1^2 f + \int_2^4 f$$

$$- 12 = 5 + \int_2^4 f.$$

$$- \text{Donc } \int_2^4 f = 12 - 5 = 7.$$

- **Méthode générale** : on part toujours de l'intégrale sur le **grand** intervalle, qu'on décompose. On isole ensuite le morceau cherché par soustraction.
- **Contrôle de plausibilité** : si f est positive, le morceau $[2; 4]$ est deux fois plus large que $[1; 2]$, il est donc cohérent qu'il apporte davantage (7 contre 5).

Réponse. 7.

Correction de l'exercice 5 - Inverser les bornes

a) Échanger les bornes change le signe de l'intégrale.

$$\int_6^2 f = - \int_2^6 f = -9$$

— **Pourquoi ?** Avec une primitive F , on a $F(2) - F(6) = -(F(6) - F(2))$: c'est immédiat sur la définition.

b) Les deux bornes sont égales : l'intervalle est réduit à un point.

$$\int_6^6 f = F(6) - F(6) = 0$$

— **Interprétation** : un domaine de largeur nulle a une aire nulle, quelle que soit la fonction.

— **Usage pratique** : ces deux règles permettent d'écrire Chasles sans se soucier de l'ordre des bornes, ce qui est très commode quand b n'est pas entre a et c .

Réponse. a) -9 · b) 0 .

Correction de l'exercice 6 - Valeur moyenne d'une fonction affine

Étape 1 — l'intégrale. Une primitive de $2t + 1$ est $t^2 + t$.

$$- \int_0^4 (2t + 1) dt = [t^2 + t]_0^4 = (16 + 4) - 0 = 20.$$

Étape 2 — la valeur moyenne.

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \frac{1}{4-0} \times 20 = 5$$

Comparaison.

— $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$: la valeur moyenne est atteinte exactement au **milieu** de l'intervalle.

— **Propriété à connaître** : pour une fonction **affine**, la valeur moyenne est toujours la valeur au milieu, et aussi la moyenne des valeurs aux bornes : $\frac{f(0) + f(4)}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5$.

— **Mise en garde** : cela ne vaut **que** pour les fonctions affines. Pour $t \mapsto t^2$ sur $[0; 3]$, la moyenne est 3 alors que la valeur au milieu est 2,25.

Réponse. $\mu = 5$, soit exactement $f(2)$.

Correction de l'exercice 7 - Valeur moyenne d'un carré

Étape 1 — l'intégrale.

$$- \int_0^3 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^3 = 9.$$

Étape 2 — la valeur moyenne.

$$\mu = \frac{1}{3-0} \times 9 = 3$$

Vérification.

— Sur $[0; 3]$, f est croissante : son minimum est $f(0) = 0$ et son maximum $f(3) = 9$.

— On a bien $0 \leq 3 \leq 9$: la valeur moyenne est dans l'encadrement attendu.

— **Remarque** : $\mu = 3$ est nettement plus proche du minimum que du maximum. C'est logique, car la parabole reste longtemps basse avant de monter brusquement : la moyenne est tirée vers le bas.

— La valeur moyenne est atteinte en $t = \sqrt{3} \approx 1,73$, et non au milieu $t = 1,5$.

Réponse. $\mu = 3$, compris entre 0 et 9.

Correction de l'exercice 8 - Tension moyenne sur une alternance

Étape 1 — l'intégrale. Une primitive de $\sin(\omega t)$ est $-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}$, avec ici $\omega = 100\pi$.

$$\int_0^{0,01} 10 \sin(100\pi t) dt = \left[-\frac{10 \cos(100\pi t)}{100\pi} \right]_0^{0,01}$$

- En $t = 0,01$: $100\pi \times 0,01 = \pi$, et $\cos(\pi) = -1$, d'où $+\frac{10}{100\pi}$.
- En $t = 0$: $\cos(0) = 1$, d'où $-\frac{10}{100\pi}$.
- L'intégrale vaut $\frac{10}{100\pi} + \frac{10}{100\pi} = \frac{20}{100\pi} \approx 0,063\,662$.

Étape 2 — la valeur moyenne, sur un intervalle de largeur 0,01.

$$\mu = \frac{1}{0,01} \times \frac{20}{100\pi} = \frac{20}{\pi} \approx 6,37 \text{ V}$$

- **Formule à retenir** : la valeur moyenne d'une sinusoïde d'amplitude A sur une demi-période vaut $\frac{2A}{\pi}$, soit ici $\frac{20}{\pi}$.
- **Contrôle** : 6,37 V est bien compris entre 0 et l'amplitude 10 V, et représente environ 64 % de celle-ci.

Réponse. $\mu = \frac{20}{\pi} \approx 6,37 \text{ V}$.

Correction de l'exercice 9 - Moyenne sur une période entière

$$\int_0^{0,02} 10 \sin(100\pi t) dt = \left[-\frac{10 \cos(100\pi t)}{100\pi} \right]_0^{0,02}$$

- En $t = 0,02$: $100\pi \times 0,02 = 2\pi$ et $\cos(2\pi) = 1$, d'où $-\frac{10}{100\pi}$.
- En $t = 0$: $-\frac{10}{100\pi}$.
- L'intégrale vaut $-\frac{10}{100\pi} + \frac{10}{100\pi} = 0$.

Valeur moyenne.

- $\mu = \frac{1}{0,02} \times 0 = 0 \text{ V}$.

Explication.

- Sur une période, l'alternance positive et l'alternance négative ont des aires **exactement opposées** : elles se compensent.
- **Conséquence pratique** : un voltmètre en position « continu » indiquerait 0 V sur ce signal, alors qu'il transporte bien de l'énergie. C'est pourquoi on caractérise une tension alternative par sa **valeur efficace**, ici $\frac{10}{\sqrt{2}} \approx 7,07 \text{ V}$, et non par sa moyenne.

Réponse. $\mu = 0 \text{ V}$: les deux alternances se compensent.

Correction de l'exercice 10 - Moyenne d'une décroissance exponentielle

Étape 1 — l'intégrale. Une primitive de e^{at} est $\frac{1}{a}e^{at}$, avec ici $a = -0,5$, donc $\frac{1}{a} = -2$.

$$\int_0^4 e^{-0,5t} dt = [-2e^{-0,5t}]_0^4 = -2e^{-2} + 2$$

- $e^{-2} \approx 0,135\,335$, donc l'intégrale vaut environ $2 - 0,270\,671 = 1,729\,329$.

Étape 2 — la valeur moyenne.

$$\mu = \frac{1}{4-0} \times 1,729\,329 \approx 0,432$$

- **Contrôle** : sur $[0 ; 4]$, f décroît de 1 à $e^{-2} \approx 0,135$. La valeur moyenne 0,432 est bien dans cet intervalle.
- **Lecture** : la moyenne est plus proche de la valeur basse, parce que la fonction chute vite au début puis reste longtemps petite. La moyenne d'une exponentielle décroissante n'est jamais la moyenne des deux extrémités, qui vaudrait ici 0,568.

Réponse. $\mu \approx 0,432$.

Correction de l'exercice 11 - Le rectangle de même aire

a) On part de la définition de la valeur moyenne et on l'inverse.

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \quad \text{donc} \quad \int_a^b f = \mu \times (b-a)$$

— Volume : $12 \times 15 = 180$ litres.

b) La valeur moyenne est la **hauteur du rectangle** de base $[0 ; 15]$ qui a exactement la même aire que le domaine sous la courbe du débit.

- Ce rectangle mesure 15 de large et 12 de haut, soit 180 d'aire : le même volume que le débit réel, pourtant variable.
- **Interprétation concrète** : un débit constant de 12 L/min pendant 15 minutes remplirait le même réservoir que le débit réel. C'est exactement ce que signifie « moyenne » en physique.
- **Usage au bac** : quand l'énoncé donne une valeur moyenne et demande une quantité totale, c'est toujours la multiplication $\mu \times (b-a)$ qu'il faut écrire.

Réponse. a) 180 litres · b) c'est la hauteur du rectangle de même aire que le domaine sous la courbe.

Correction de l'exercice 12 - Encadrer par les extrema

On applique l'encadrement du cours, avec $b-a = 7-2 = 5$.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

- Borne inférieure : $3 \times 5 = 15$.
- Borne supérieure : $8 \times 5 = 40$.

$$15 \leq \int_2^7 f(t) dt \leq 40$$

Valeur moyenne. On divise l'encadrement par 5.

- $3 \leq \mu \leq 8$.
- **Résultat général** : la valeur moyenne est toujours comprise entre le minimum et le maximum de la fonction. C'est le contrôle le plus rapide sur tout calcul de moyenne.
- **Interprétation géométrique** : le domaine sous la courbe contient le rectangle de hauteur 3 et est contenu dans celui de hauteur 8, tous deux de base 5.

Réponse. $15 \leq \int_2^7 f \leq 40$ et $3 \leq \mu \leq 8$.

Correction de l'exercice 13 - Encadrer par deux rectangles

a) f étant croissante sur $[1 ; 3]$, son minimum est $f(1) = 2$ et son maximum $f(3) = 8$. La largeur vaut 2.

— $2 \times 2 = 4 \leq \int_1^3 f \leq 8 \times 2 = 16$.

— L'encadrement a une amplitude de 12 : il est très grossier.

b) On découpe en $[1; 2]$ et $[2; 3]$, de largeur 1 chacun, et on encadre séparément.

— Sur $[1; 2]$: $2 \leq f \leq 4$, donc $2 \leq \int_1^2 f \leq 4$.

— Sur $[2; 3]$: $4 \leq f \leq 8$, donc $4 \leq \int_2^3 f \leq 8$.

— En additionnant (Chasles) : $6 \leq \int_1^3 f \leq 12$.

— L'amplitude est passée de 12 à 6 : elle a été **divisée par deux** en doublant le nombre de rectangles.

— **Principe de la méthode des rectangles** : à chaque fois qu'on double le nombre de subdivisions, l'amplitude de l'encadrement est divisée par deux. C'est ce qui permet d'approcher une intégrale d'aussi près qu'on veut, y compris pour une fonction dont on ne connaît pas de primitive.

Réponse. a) $4 \leq \int_1^3 f \leq 16$ · b) $6 \leq \int_1^3 f \leq 12$.

Correction de l'exercice 14 - Comparer sans calculer

Comparaison des fonctions. Pour $x \in [0; 1]$, on compare x^2 et x^3 .

— $x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$, produit de deux facteurs positifs sur $[0; 1]$.

— Donc $x^3 \leq x^2$ sur tout l'intervalle.

Conclusion par la croissance de l'intégrale.

$$\int_0^1 x^3 dx \leq \int_0^1 x^2 dx$$

Vérification par le calcul.

— $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0,333$.

— $\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} = 0,25$.

— On a bien $0,25 \leq 0,333$.

— **Attention au domaine** : sur $[1; 2]$, l'inégalité s'inverse, car $x^3 \geq x^2$ dès que $x \geq 1$. Une comparaison de fonctions n'est jamais valable « en général », toujours sur un intervalle précis.

Réponse. $\int_0^1 x^3 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2$.

Correction de l'exercice 15 - Deux valeurs moyennes à recoller

Piège à éviter. La réponse n'est pas $\frac{8+14}{2} = 11$: les deux intervalles n'ont pas la même durée.

Méthode correcte : repasser par les volumes.

— Sur $[0; 10]$: $\int_0^{10} f = 8 \times 10 = 80$ litres.

— Sur $[10; 15]$: $\int_{10}^{15} f = 14 \times 5 = 70$ litres.

— Par Chasles : $\int_0^{15} f = 80 + 70 = 150$ litres.

Valeur moyenne globale.

$$\mu = \frac{1}{15-0} \times 150 = 10 \text{ L/min}$$

- **Contrôle** : 10 est bien compris entre 8 et 14, et plus proche de 8 puisque la première phase est deux fois plus longue. Cohérent.
- **Règle générale** : les valeurs moyennes ne s'additionnent pas, mais les **intégrales** oui. On revient donc toujours aux quantités totales avant de moyenner.

Réponse. $\mu = 10 \text{ L/min}$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : puissance moyenne et énergie

a) On dérive P terme à terme, avec $(e^{at})' = a e^{at}$.

- $P'(t) = 200 - 500 \times (-0,3) e^{-0,3t} = 200 + 150 e^{-0,3t} = p(t)$.
- P est bien une primitive de p .

b) L'énergie est l'intégrale de la puissance.

$$E = \int_0^{10} p(t) dt = [200t - 500 e^{-0,3t}]_0^{10}$$

- En $t = 10$: $2\,000 - 500 e^{-3}$, avec $e^{-3} \approx 0,049\,787$, soit $2\,000 - 24,894 = 1\,975,106$.
- En $t = 0$: $0 - 500 \times 1 = -500$.
- $E \approx 1\,975,106 + 500 = 2\,475,106$, soit environ $2\,475 \text{ J}$.

c) **Valeur moyenne.**

$$\mu = \frac{1}{10-0} \times 2\,475,106 \approx 247,5 \text{ W}$$

d) En régime établi, quand t devient grand, $e^{-0,3t}$ tend vers 0 et $p(t)$ tend vers 200 W .

- La puissance moyenne du démarrage, $247,5 \text{ W}$, dépasse donc le régime établi de $47,5 \text{ W}$, soit environ 24% de plus.
- **Surcoût énergétique** : l'énergie « en trop » vaut $2\,475 - 200 \times 10 = 475 \text{ J}$ sur les dix premières secondes.
- **Lecture technique** : ce surcoût est le prix du transitoire. Sur un équipement démarré 40 fois par jour, cela représente $475 \times 40 = 19\,000 \text{ J}$ par jour, soit environ $5,3 \text{ W}\cdot\text{h}$ — négligeable ici, mais c'est ce même calcul qui, sur un moteur de forte puissance, justifie d'éviter les démarrages répétés.

Réponse. b) $E \approx 2\,475 \text{ J}$ · c) $\mu \approx 247,5 \text{ W}$ · d) $47,5 \text{ W}$ de plus que le régime établi, soit 475 J de surcoût.