

Plaquette 1 - Aires, primitives, valeur moyenne et Chasles

Calcul intégral — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

On relie l'intégrale à l'**aire** sous une courbe, on la calcule avec une **primitive**, on encadre par des rectangles, puis on utilise la **linéarité**, la **relation de Chasles** et la **valeur moyenne** — cette dernière servant en physique à définir une valeur efficace ou une puissance moyenne.

Exercice 1 - Intégrale d'une fonction affine

Calculer $\int_0^4 (2t + 1) dt$, puis vérifier le résultat par une aire géométrique.

Exercice 2 - Intégrale d'un polynôme

Calculer $\int_1^3 (3t^2 - 2t) dt$.

Exercice 3 - Intégrale et fonction inverse

Calculer $\int_1^4 \frac{2}{t^2} dt$.

Exercice 4 - Encadrement par rectangles

Soit $f(t) = t^2$ sur $[0 ; 2]$.

- Encadrer $\int_0^2 t^2 dt$ par deux rectangles de largeur 1.
- Calculer la valeur exacte et vérifier l'encadrement.

Exercice 5 - Linéarité

On sait que $\int_0^2 f = 5$ et $\int_0^2 g = -3$. Calculer :

- $\int_0^2 (f + g)$
- $\int_0^2 3f$
- $\int_0^2 (2f - g)$

Exercice 6 - Relation de Chasles

On sait que $\int_0^3 f = 7$ et $\int_3^8 f = 12$.

- Calculer $\int_0^8 f$.
- Calculer $\int_8^3 f$.

Exercice 7 - Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne de $f(t) = 3t^2$ sur $[0 ; 2]$.

Exercice 8 - Intégrale d'un signal sinusoïdal

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt$, puis $\int_0^{\pi} \sin t \, dt$.

Exercice 9 - Valeur moyenne d'une tension

Une tension vaut $u(t) = 12 \cos(100\pi t)$ (en volts).

- Calculer sa valeur moyenne sur une demi-période, c'est-à-dire sur $[0 ; 0,01]$.
- Que vaut sa valeur moyenne sur une période complète $[0 ; 0,02]$?

Exercice 10 - Aire entre deux bornes et signe

Soit $f(t) = t - 2$ sur $[0 ; 4]$.

- Calculer $\int_0^4 (t - 2) \, dt$.
- Calculer l'aire **géométrique** comprise entre la courbe et l'axe des abscisses sur $[0 ; 4]$.

Exercice 11 - Problème : énergie consommée

La puissance appelée par une machine est $p(t) = 400 + 60t$ (en watts, t en heures), sur $[0 ; 5]$.

- Calculer l'énergie consommée en 5 heures (en Wh puis en kWh).
- Calculer la puissance moyenne sur ces 5 heures.

Exercice 12 - Problème : débit variable

Le débit d'une pompe est $d(t) = 30 - 2t$ (en L/min, t en minutes), sur $[0 ; 10]$.

- Quel volume est pompé en 10 minutes ?
- Quel est le débit moyen ?
- Au bout de combien de temps la moitié du volume total est-elle pompée ? (Résoudre une équation du second degré.)

Exercice 13 - Intégrale d'une exponentielle

Calculer la valeur exacte de $\int_0^2 e^t \, dt$, puis une valeur approchée au millième. Interpréter en termes d'aire.

Exercice 14 - Puissance moyenne d'une machine

La puissance absorbée par une machine pendant sa montée en régime vaut $P(t) = 3t^2 + 2$ kW, pour t entre 0 et 2 heures.

- Calculer l'énergie consommée $W = \int_0^2 P(t) \, dt$, en kWh.
- En déduire la puissance moyenne sur cette période.

Exercice 15 - Synthèse : aire et valeur moyenne

Soit $f(t) = -t^2 + 4t$ sur $[0 ; 4]$.

- a) Vérifier que f est positive sur $[0 ; 4]$.
- b) Calculer $\int_0^4 f(t) dt$.
- c) Calculer la valeur moyenne de f et comparer au maximum de f .