

Plaquette 3 - Aires : sous une courbe, entre deux courbes, sous l'axe

Calcul intégral — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Une intégrale et une aire ne sont pas la même chose : elles coïncident **seulement** quand la fonction est positive. Trois situations à distinguer : f positive (aire = intégrale), f négative (aire = $-$ intégrale), f changeant de signe (on **découpe**). Pour l'aire entre deux courbes, on intègre la différence « courbe du haut moins courbe du bas ».

Exercice 1 - Une aire triangulaire

Calculer $\int_0^4 3t \, dt$, puis retrouver le résultat par la géométrie.

Exercice 2 - Une aire sous une parabole

Soit $f(t) = 4 - t^2$. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites $t = -2$ et $t = 2$.

Exercice 3 - Convertir en centimètres carrés

On reprend l'aire précédente, $\frac{32}{3}$ unités d'aire. Dans le repère utilisé, une unité représente 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées. Exprimer cette aire en cm^2 .

Exercice 4 - Une fonction négative

Soit $f(t) = t - 5$.

- Calculer $\int_1^4 f(t) \, dt$.
- En déduire l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $t = 1$ et $t = 4$.

Exercice 5 - Une fonction qui change de signe

Soit $f(t) = t^2 - 4$ sur $[0; 3]$.

- Étudier le signe de f sur cet intervalle.
- Calculer $\int_0^3 f(t) \, dt$.
- Calculer l'aire totale du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses.

Exercice 6 - Entre deux droites

Calculer l'aire du domaine compris entre les droites d'équations $y = 2x + 1$ et $y = x - 1$, pour $x \in [0; 3]$.

Exercice 7 - Entre une parabole et une droite

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = 4 - x^2$ et la droite d'équation $y = x + 2$.

Exercice 8 - Une parabole entièrement sous l'axe

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = x^2 - 9$ et l'axe des abscisses.

Exercice 9 - Utiliser la parité

Calculer les deux intégrales en utilisant la parité des fonctions.

a) $\int_{-1}^1 (x^3 + 5x) dx$

b) $\int_{-1}^1 (3x^2 + 2) dx$

Exercice 10 - Comparer deux aires sans calcul

Sur $[0 ; 1]$, on considère $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.

a) Comparer $f(x)$ et $g(x)$ sur cet intervalle, sans calculer les intégrales.

b) En déduire le signe de $\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx$, puis calculer cette intégrale.

Exercice 11 - Déterminer une borne à partir d'une aire

Déterminer le réel $a > 0$ tel que l'aire sous la courbe de $f(t) = t$, entre $t = 0$ et $t = a$, vaille 8 unités d'aire.

Exercice 12 - Exponentielle et tangente

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = e^x$ et la droite d'équation $y = x + 1$, pour $x \in [0 ; 1]$.

Exercice 13 - Une alternance de sinusoïde

Soit $f(t) = \sin(t)$.

a) Calculer $\int_0^\pi \sin(t) dt$.

b) Calculer $\int_0^{2\pi} \sin(t) dt$.

c) Quelle est l'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses sur $[0 ; 2\pi]$?

Exercice 14 - Lire une aire sur un graphique

Une fonction f est positive sur $[0 ; 6]$. On dispose du tableau de valeurs suivant, et l'on sait que f est croissante sur cet intervalle.

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	2,0	2,6	3,4	4,1	4,7	5,2	5,6

Donner un encadrement de $\int_0^6 f(t) dt$ par la méthode des rectangles de largeur 1.

Exercice 15 - Aire d'un domaine à trois côtés

Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $y = x^2$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 3$.

Exercice 16 - Synthèse : la section d'une pièce profilée

Le profil d'une pièce est délimité, dans un repère où l'unité vaut 1 cm sur chaque axe, par la courbe d'équation $y = 9 - x^2$ (bord supérieur) et la droite d'équation $y = 5$ (bord inférieur).

- Déterminer les abscisses des points d'intersection.
- Calculer l'aire de la section, en cm^2 .
- La pièce est en aluminium, d'épaisseur 4 cm et de masse volumique $2,7 \text{ g/cm}^3$. Calculer sa masse.
- On veut alléger la pièce de 10 % en remontant le bord inférieur à une hauteur h . Déterminer h , arrondie au millimètre.