

Plaquette 4 - Linéarité, Chasles, valeur moyenne et encadrements

Calcul intégral — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Beaucoup de questions se traitent **sans calculer la moindre primitive** : la **linéarité** recompose une intégrale à partir d'autres déjà connues, la relation de **Chasles** recolle deux intervalles, et l'**encadrement par rectangles** donne un ordre de grandeur. La **valeur moyenne**, enfin, est le pont vers la physique : c'est la hauteur du rectangle de même aire.

Exercice 1 - Recomposer par linéarité

On sait que $\int_0^2 f(t) dt = 5$ et $\int_0^2 g(t) dt = -3$.

Calculer, sans connaître f ni g :

a) $\int_0^2 (f(t) + g(t)) dt$

b) $\int_0^2 (2f(t) - 3g(t)) dt$

Exercice 2 - Sortir un coefficient

Sachant que $\int_1^4 h(t) dt = 6$, calculer $\int_1^4 \left(\frac{h(t)}{2} + 5 \right) dt$.

Exercice 3 - Recoller deux intervalles

On donne $\int_0^3 f(t) dt = 7$ et $\int_3^5 f(t) dt = 4$.

Calculer $\int_0^5 f(t) dt$.

Exercice 4 - Chasles à l'envers

On donne $\int_1^4 f(t) dt = 12$ et $\int_1^2 f(t) dt = 5$.

Calculer $\int_2^4 f(t) dt$.

Exercice 5 - Inverser les bornes

Sachant que $\int_2^6 f(t) dt = 9$, calculer :

a) $\int_6^2 f(t) dt$

b) $\int_6^6 f(t) dt$

Exercice 6 - Valeur moyenne d'une fonction affine

Calculer la valeur moyenne de $f(t) = 2t + 1$ sur $[0 ; 4]$, puis comparer à $f(2)$.

Exercice 7 - Valeur moyenne d'un carré

Calculer la valeur moyenne de $f(t) = t^2$ sur $[0 ; 3]$, et vérifier qu'elle est bien comprise entre le minimum et le maximum de f .

Exercice 8 - Tension moyenne sur une alternance

Une tension est modélisée par $u(t) = 10 \sin(100\pi t)$ (en volts, t en secondes). Sa période vaut $T = 0,02$ s.

Calculer la tension moyenne sur une demi-période $[0 ; 0,01]$, arrondie au centième de volt.

Exercice 9 - Moyenne sur une période entière

Avec la même tension $u(t) = 10 \sin(100\pi t)$, calculer la tension moyenne sur une **période** complète $[0 ; 0,02]$, puis expliquer le résultat.

Exercice 10 - Moyenne d'une décroissance exponentielle

Calculer la valeur moyenne de $f(t) = e^{-0,5t}$ sur $[0 ; 4]$, arrondie au millièm.

Exercice 11 - Le rectangle de même aire

Un débit variable a une valeur moyenne de 12 L/min sur l'intervalle $[0 ; 15]$ (en minutes).

- Quel volume total s'est écoulé ?
- Interpréter géométriquement la valeur moyenne.

Exercice 12 - Encadrer par les extrema

Une fonction f vérifie $3 \leq f(t) \leq 8$ pour tout $t \in [2 ; 7]$.

Encadrer $\int_2^7 f(t) dt$, puis sa valeur moyenne.

Exercice 13 - Encadrer par deux rectangles

Soit f croissante sur $[1 ; 3]$, avec $f(1) = 2$ et $f(3) = 8$.

- Encadrer $\int_1^3 f(t) dt$ par deux rectangles.
- On apprend de plus que $f(2) = 4$. Affiner l'encadrement en utilisant quatre rectangles de largeur 1.

Exercice 14 - Comparer sans calculer

Comparer $\int_0^1 x^2 dx$ et $\int_0^1 x^3 dx$ sans les calculer, puis vérifier par le calcul.

Exercice 15 - Deux valeurs moyennes à recoller

Un débit a une valeur moyenne de 8 L/min sur $[0 ; 10]$ et de 14 L/min sur $[10 ; 15]$ (temps en minutes).

Calculer la valeur moyenne du débit sur $[0 ; 15]$.

Exercice 16 - Synthèse : puissance moyenne et énergie

La puissance consommée par un équipement au démarrage est modélisée par $p(t) = 200 + 150 e^{-0,3t}$ (en watts, t en secondes), pour $t \in [0 ; 10]$.

- Vérifier que $P(t) = 200t - 500 e^{-0,3t}$ est une primitive de p .
- Calculer l'énergie consommée entre $t = 0$ et $t = 10$, arrondie au joule.
- En déduire la puissance moyenne sur cette période.
- Comparer cette puissance moyenne à la puissance en régime établi, et calculer le surcoût énergétique du démarrage.