

MATHÉMATIQUES

Calcul intégral

Terminale STI2D

Intégrale • Aire sous la courbe • Méthode des rectangles • Primitive
 $F(b) - F(a)$ • Relation de Chasles • Linéarité • Valeur moyenne • Énergie

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité physique-chimie et mathématiques, classe terminale STI2D** (programme de 2019), partie mathématiques, « Calcul intégral ». Il couvre :

- intégrale d'une fonction positive comme aire sous la courbe ; approximation par la méthode des rectangles ;
- extension aux fonctions de signe quelconque ; convention $\int_b^a f = -\int_a^b f$;
- linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles ;
- calcul par une primitive : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$; la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ a pour dérivée f ;
- valeur moyenne ; aire entre deux courbes ; applications physiques (énergie, distance).

Objectif : interpréter une intégrale comme une aire, l'approcher par des rectangles, la calculer à l'aide d'une primitive et l'utiliser pour des aires, des valeurs moyennes et des grandeurs physiques.

Document pédagogique – mathlvl.fr

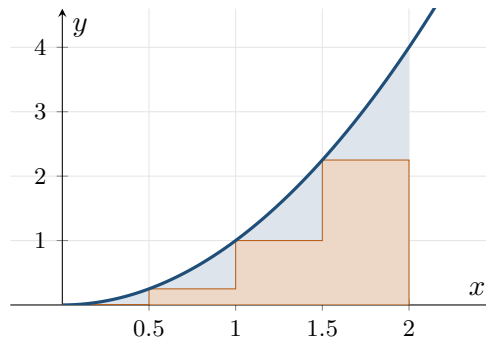
Table des matières

1	Intégrale et aire	3
2	Calcul à l'aide d'une primitive	4
3	Propriétés	4
4	Valeur moyenne et applications	5
5	Erreurs classiques	5
6	Fiche de synthèse	5
7	Exercices d'application	6
8	Corrigés des exercices	6

1. Intégrale et aire

Intégrale d'une fonction positive

Soit f continue et positive sur $[a; b]$. L'**intégrale** de f de a à b , notée $\int_a^b f(x) dx$, est l'aire (en unités d'aire) du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.



L'aire sous $y = x^2$ entre 0 et 2 (en bleu), approchée par défaut par 4 rectangles (en orange).

Méthode des rectangles

On partage $[a; b]$ en n intervalles de largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ et l'on additionne les aires des rectangles de hauteur $f(x_i)$: $\sum_i f(x_i) \Delta x$. Plus n est grand, meilleure est l'approximation.

```
def rectangles(f, a, b, n):
    dx = (b - a) / n
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + f(a + i * dx) * dx
    return s
```

Pour $\int_0^2 x^2 dx$ avec $n = 4$: rectangles à gauche $0,5 \times (0 + 0,25 + 1 + 2,25) = 1,75$, à droite $0,5 \times (0,25 + 1 + 2,25 + 4) = 3,75$. La valeur exacte, $\frac{8}{3} \approx 2,67$, est entre les deux.

Fonction de signe quelconque

Si f est négative sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x) dx$ est l'**opposé** de l'aire. Si f change de signe, l'intégrale est la somme des aires au-dessus de l'axe moins celle des aires au-dessous. On pose aussi $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

2. Calcul à l'aide d'une primitive

Théorème fondamental

Si f est continue sur $[a; b]$ et si F est une primitive de f :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

De plus, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a : sa dérivée est f .

$$- \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

$$- \int_1^3 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_1^3 = 12 - 2 = 10.$$

$$- \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 1 + 1 = 2, \text{ mais } \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0 : \text{les aires au-dessus et au-dessous de l'axe se compensent.}$$

3. Propriétés

Règles de calcul

Pour f, g continues et k réel :

$$- \text{linéarité : } \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \text{ et } \int_a^b kf = k \int_a^b f ;$$

$$- \text{relation de Chasles : } \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f ;$$

$$- \text{positivité : si } f \geq 0 \text{ sur } [a; b] \text{ (} a \leq b \text{), alors } \int_a^b f \geq 0 ;$$

$$- \text{croissance : si } f \leq g \text{ sur } [a; b], \text{ alors } \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Aire entre deux courbes

Si $f \geq g$ sur $[a; b]$, l'aire comprise entre les deux courbes est $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

Entre $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0; 1]$ (où $x \geq x^2$) : $\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ u.a.

4. Valeur moyenne et applications

Valeur moyenne

La **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ ($a < b$) est $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$: c'est la hauteur du rectangle de base $[a; b]$ de même aire.

$f(x) = x^2$ sur $[0; 3]$: $\int_0^3 x^2 dx = 9$, donc $\mu = \frac{9}{3} = 3$. La valeur moyenne de $\sin$ sur $[0; \pi]$ est $\frac{2}{\pi} \approx 0,64$.

Énergie et distance

- L'énergie reçue est l'intégrale de la puissance : une puissance $P(t) = 2t$ kW pendant 3 heures fournit $\int_0^3 2t dt = 9$ kWh.
- La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse : avec $v(t) = 3t^2$ m/s, entre 0 et 2 s, $d = \int_0^2 3t^2 dt = 8$ m.

5. Erreurs classiques

À éviter

- Confondre intégrale et aire quand f change de signe : l'aire se calcule morceau par morceau.
- Calculer $F(a) - F(b)$ au lieu de $F(b) - F(a)$.
- Oublier le facteur $\frac{1}{b-a}$ dans la valeur moyenne.
- Se tromper de primitive : une primitive de $\sin$ est $-\cos$.

6. Fiche de synthèse

Aire	$f \geq 0$: $\int_a^b f =$ aire sous la courbe
Calcul	$\int_a^b f = F(b) - F(a)$; $(\int_a^x f)' = f$
Chasles	$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$
Entre deux courbes	$f \geq g$: $\int_a^b (f - g)$
Valeur moyenne	$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$
Rectangles	$\sum f(x_i) \Delta x$

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Calculs

Calculer $\int_0^1 (3x^2 + 1) dx$ et $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$.

Exercice 2 – Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne de $f(t) = 4 - t$ sur $[0; 4]$.

Exercice 3 – Aire

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $f(x) = 4 - x^2$ et l'axe des abscisses, sur $[-2; 2]$.

Exercice 4 – Énergie

Un appareil absorbe la puissance $P(t) = 3 - 0,5t$ (en kW) pendant 4 heures. Calculer l'énergie consommée.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $[x^3 + x]_0^1 = 2$; $[\sin x]_0^{\pi/2} = 1$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $\int_0^4 (4 - t) dt = \left[4t - \frac{t^2}{2}\right]_0^4 = 8$, donc $\mu = \frac{8}{4} = 2$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $f \geq 0$ sur $[-2; 2]$: $\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$ u.a.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $\int_0^4 (3 - 0,5t) dt = [3t - 0,25t^2]_0^4 = 12 - 4 = 8$ kWh.