

**Plaquette 5 - Composées en situation :
modèles, études, optimisation**

Composition de fonctions — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Étudier un modèle composé.

- **Lire le modèle** : décomposer en étages ; l'étage intérieur transforme l'entrée, l'étage extérieur produit la sortie.
- **Variations sans dériver** : un étage croissant conserve le sens de variation, un étage décroissant l'inverse.
- Dérivée d'une composée :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

$$(e^u)' = u' e^u ; (\ln u)' = \frac{u'}{u} ; (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} ; \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

$$\text{— Logarithme décimal : } \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}, \log(ab) = \log a + \log b, \log(10^n) = n.$$

$$\text{— Sensibilité : pour une petite variation } h \text{ de l'entrée, } f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

$$\text{— Dérivée logarithmique : le taux de croissance relatif d'une grandeur } f > 0 \text{ est } \frac{f'}{f} = (\ln f)'. \quad \frac{f'}{f} = (\ln f)'.$$

- **Résoudre un seuil** : isoler l'étage extérieur, appliquer sa réciproque (ln pour exp, exp pour ln, carré pour la racine), et recommencer étage par étage.

Correction de l'exercice 1 - Croissance logistique

$$\text{a) } P(0) = \frac{1\,000}{1+9} = 100.$$

$$\text{— } e^{-0,5t} \rightarrow 0 \text{ donc } 1 + 9e^{-0,5t} \rightarrow 1 \text{ et } P(t) \rightarrow 1\,000 : \text{c'est la } \mathbf{capacité} \text{ du milieu.}$$

$$\text{b) Étages : } t \mapsto e^{-0,5t} \text{ (décroissant)} \mapsto 1 + 9X \text{ (croissant)} \mapsto \frac{1\,000}{X} \text{ (décroissant sur }]0; +\infty[).$$

$$\text{— Deux étages décroissants : } P \text{ est } \mathbf{croissante}.$$

$$\text{c) On isole étage par étage :}$$

$$\frac{1\,000}{1 + 9e^{-0,5t}} = 500 \Leftrightarrow 1 + 9e^{-0,5t} = 2 \Leftrightarrow e^{-0,5t} = \frac{1}{9}$$

$$\text{— } -0,5t = -\ln 9, \text{ donc } t = 2 \ln 9 \approx 4,39 \text{ h.}$$

$$\text{— C'est l'instant où la population atteint la } \mathbf{moitié} \text{ de la capacité ; on montre que la croissance y est la plus rapide.}$$

$$\mathbf{Réponse.} \text{ a) } 100 ; \text{ limite } 1\,000 \cdot \text{ c) } t = 2 \ln 9 \approx 4,39 \text{ h.}$$

Correction de l'exercice 2 - Niveau sonore en décibels

$$\text{a) } I \mapsto \frac{I}{I_0} \text{ (multiplication par un nombre positif)} \mapsto \log X \mapsto 10X.$$

$$\text{— Les trois étages sont croissants : } L \text{ est croissante.}$$

$$\text{b) } \frac{I}{I_0} = \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10^6, \text{ donc } L = 10 \log(10^6) = 10 \times 6 = 60 \text{ dB.}$$

c) Avec l'intensité $2I$, la propriété $\log(ab) = \log a + \log b$ donne :

$$L' = 10 \log \left(\frac{2I}{I_0} \right) = 10 \log 2 + 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = L + 10 \log 2$$

- $10 \log 2 \approx 3,01$: doubler l'intensité ajoute environ **3 dB**.
- Multiplier par 10 ajoute $10 \log 10 = 10$ dB.
- **Conséquence** : deux machines de 80 dB ne font pas 160 dB, mais environ 83 dB.

Réponse. b) 60 dB · c) +3 dB environ ; +10 dB.

Correction de l'exercice 3 - Un filtre passe-bas

a) Étages : $f \mapsto \frac{f}{f_c}$ (croissant) $\mapsto X^2$ (croissant sur $[0; +\infty[$) $\mapsto 1 + X$ (croissant) $\mapsto \sqrt{X}$ (croissant) $\mapsto \frac{1}{X}$ (décroissant).

- Un seul étage décroissant : G est **décroissante**. Le filtre atténue d'autant plus que la fréquence est élevée.

b) $G(f_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$.

- $20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -10 \log 2 \approx -3$ dB : c'est la définition de la « coupure à -3 dB ».

c) On résout $G(f) \leq 0,1$ en remontant les étages :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c} \right)^2} \geq 10 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \geq 100 \Leftrightarrow \frac{f}{f_c} \geq \sqrt{99}$$

- $f \geq \sqrt{99} f_c \approx 9,95 f_c$: il faut aller à presque **dix fois** la fréquence de coupure.

Réponse. b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, soit -3 dB · c) $f \geq \sqrt{99} f_c \approx 9,95 f_c$.

Correction de l'exercice 4 - Oscillations amorties

a) Pour tout t , $-1 \leq \cos(10t) \leq 1$. On multiplie par $12e^{-2t} > 0$, ce qui conserve les inégalités :

$$-12e^{-2t} \leq u(t) \leq 12e^{-2t}$$

- Les courbes de $\pm 12e^{-2t}$ forment l'**enveloppe** : la tension oscille entre elles, et son amplitude décroît exponentiellement.

b) $u(0) = 12 \cos 0 = 12$ V.

- En $t = 0,5$: l'amplitude vaut au plus $12e^{-1} \approx 4,41$ V.

c) On veut $12e^{-2t} \leq 0,01 \times 12$, soit $e^{-2t} \leq 0,01$.

- $-2t \leq \ln 0,01 = -\ln 100$, donc $t \geq \frac{\ln 100}{2} \approx 2,30$ s.

- Pendant ce temps, le cosinus (période $\frac{2\pi}{10} \approx 0,63$ s) a effectué environ 3,7 oscillations.

Réponse. a) enveloppe $\pm 12e^{-2t}$ · b) 12 V ; $\approx 4,41$ V · c) $t \geq \frac{\ln 100}{2} \approx 2,30$ s.

Correction de l'exercice 5 - Une courbe en cloche

a) Étages : $x \mapsto x - 170 \mapsto X^2 \mapsto -\frac{X}{50} \mapsto e^X$.

- Sur $] -\infty ; 170]$, $x - 170 \leq 0$ et le carré y est **décroissant** ; puis $-\frac{X}{50}$ est décroissant ; l'exponentielle est croissante. Deux étages décroissants : f croît.
- Sur $[170 ; +\infty[$, le carré est croissant : un seul étage décroissant, f décroît. Maximum $f(170) = 1$.

b) $f(175) = e^{-25/50} = e^{-0,5} \approx 0,607$ et $f(165) = e^{-0,5}$ aussi : la courbe est **symétrique** par rapport à $x = 170$.

c) On remonte les étages :

$$e^{-(x-170)^2/50} = 0,5 \Leftrightarrow \frac{(x-170)^2}{50} = \ln 2 \Leftrightarrow (x-170)^2 = 50 \ln 2$$

- $x - 170 = \pm\sqrt{50 \ln 2} \approx \pm 5,9$, donc $x \approx 164,1$ ou $x \approx 175,9$ cm.
- Largeur à mi-hauteur : $2\sqrt{50 \ln 2} \approx 11,8$ cm.

Réponse. b) $f(175) = f(165) = e^{-0,5} \approx 0,607$ · c) $x \approx 164,1$ et $175,9$; largeur $\approx 11,8$ cm.

Correction de l'exercice 6 - Le temps de charge en fonction de la tension

a) On résout $12(1 - e^{-100t}) = U$:

$$e^{-100t} = 1 - \frac{U}{12}, \text{ puis } -100t = \ln\left(1 - \frac{U}{12}\right).$$

$$t(U) = -0,01 \ln\left(1 - \frac{U}{12}\right)$$

b) $t(6) = -0,01 \ln 0,5 = 0,01 \ln 2 \approx 6,93$ ms.

— $t(9) = -0,01 \ln 0,25 = 0,01 \ln 4 \approx 13,86$ ms (le double).

— $t(11,88) = -0,01 \ln 0,01 = 0,01 \ln 100 \approx 46,05$ ms.

c) Avec $u = 1 - \frac{U}{12}$ et $u' = -\frac{1}{12}$:

$$t'(U) = -0,01 \times \frac{-1/12}{1 - U/12} = \frac{0,01}{12 - U}$$

— Quand U s'approche de 12, $12 - U$ tend vers 0 et $t'(U)$ devient très grand : **chaque volt supplémentaire coûte de plus en plus de temps**. Le condensateur n'atteint jamais exactement 12 V.

Réponse. b) $\approx 6,93$ ms ; $\approx 13,86$ ms ; $\approx 46,05$ ms · c) $t'(U) = \frac{0,01}{12 - U}$.

Correction de l'exercice 7 - Température et vitesse de réaction

a) Étages : $T \mapsto \frac{1}{T}$ (décroissant) $\mapsto -6\,000 X$ (décroissant) $\mapsto A e^X$ (croissant, car $A > 0$).

— Deux étages décroissants : k est **croissante**. Plus il fait chaud, plus la réaction est rapide.

b) La constante A disparaît dans le rapport :

$$\frac{k(310)}{k(300)} = e^{-6\,000/310 + 6\,000/300} = e^{6\,000\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{310}\right)}$$

— $6\,000 \times \left(\frac{1}{300} - \frac{1}{310}\right) \approx 0,645$, et $e^{0,645} \approx 1,91$.

— Une hausse de 10°C **double presque** la vitesse : c'est la règle empirique des chimistes, et la raison pour laquelle on conserve les aliments au froid.

c) Avec $u = -\frac{6\,000}{T}$ et $u' = \frac{6\,000}{T^2}$:

— $k'(T) = \frac{6\,000A}{T^2} e^{-6\,000/T}$, strictement positive : on retrouve le résultat de a).

Réponse. b) $\approx 1,91$: la vitesse double presque · c) $k'(T) = \frac{6\,000A}{T^2} e^{-6\,000/T}$.

Correction de l'exercice 8 - Taux de croissance relatif

a) Avec les règles du logarithme :

— $\ln P(t) = \ln 2\,000 + 2 \ln(1 + 0,05t)$.

— Dérivée, avec $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$:

$$(\ln P)'(t) = 2 \times \frac{0,05}{1 + 0,05t} = \frac{0,1}{1 + 0,05t}$$

b) En $t = 0$: $\frac{0,1}{1} = 0,1$, soit 10 % par an.

— En $t = 10$: $\frac{0,1}{1,5} \approx 0,066\,7$, soit environ 6,7 % par an.

c) Un modèle exponentiel $A e^{kt}$ a un taux relatif **constant**, égal à k (car $(\ln A + kt)' = k$).

— Ici le taux diminue avec le temps : la croissance est rapide au début puis ralentit en proportion. Le modèle **n'est pas** exponentiel.

— **Intérêt de la dérivée logarithmique** : elle transforme les produits et puissances en sommes, ce qui rend le calcul immédiat.

Réponse. a) $(\ln P)' = \frac{0,1}{1 + 0,05t}$ · b) 10 % puis $\approx 6,7$ % par an · c) non, taux non constant.

Correction de l'exercice 9 - Approximations de petites variations

a) L'approximation affine en 0 est donnée par la tangente :

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

— $\ln(1+x)$: $f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, donc $f'(0) = 1$: $\ln(1+x) \approx x$.

— e^x : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$: $e^x \approx 1+x$.

b) $\ln(1,03) \approx 0,03$; la calculatrice donne 0,029 56.

— $e^{0,02} \approx 1,02$; la calculatrice donne 1,020 20.

— Erreurs de l'ordre de 4×10^{-4} et 2×10^{-4} .

c) $\ln(1,03) \approx 0,03$ par l'approximation de a) : pour de petits taux, taux discret et taux continu sont presque égaux.

— L'écart grandit avec le taux : pour +50 %, $\ln(1,5) \approx 0,405$, très différent de 0,5.
L'approximation n'est valable que **près de 0**.

Réponse. a) $\ln(1+x) \approx x$; $e^x \approx 1+x$ · b) 0,03 (exact 0,029 56) ; 1,02 (exact 1,020 20).

Correction de l'exercice 10 - Puissance au démarrage

a) $E = \frac{m}{2} u^2$ avec $u = v$:

$$(u^2)' = 2 u' u$$

— $E'(t) = \frac{m}{2} \times 2 v'(t) v(t) = m v(t) v'(t)$.

b) On calcule les deux facteurs en $t = 2$:

- $v(2) = 20(1 - e^{-1}) \approx 12,642$ m/s ;
- $v'(t) = 20 \times 0,5 e^{-0,5t} = 10 e^{-0,5t}$, donc $v'(2) = 10 e^{-1} \approx 3,679$ m/s².
- $E'(2) = 1\,000 \times 20(1 - e^{-1}) \times 10 e^{-1} \approx 46\,509$ W.
- La dérivée de l'énergie est une **puissance** : à $t = 2$ s, le moteur fournit environ 46,5 kW à chaque voiture (sans compter les frottements).

Réponse. b) $E'(2) \approx 46\,509$ W, la puissance fournie.

Correction de l'exercice 11 - Le trajet le plus rapide

a) Course : $SM = 10 - x$, parcourue en $\frac{10-x}{5}$ min.

— Nage : le triangle MHN est rectangle en H , donc $MN = \sqrt{x^2 + 9}$ (Pythagore), parcourue en $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$ min.

b) Avec $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$:

$$T(x) = \frac{1}{3} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{5}$$

— $T(x) = 0 \Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{x^2 + 9}$. Les deux membres sont positifs, on élève au carré : $25x^2 = 9x^2 + 81$, donc $x^2 = \frac{81}{16}$ et $x = 2,25$.

c) T est négative avant 2,25 et positive après (par exemple $T(0) = -0,2$ et $T(10) \approx 0,12$) : c'est un minimum.

— $T(2,25) = \frac{\sqrt{14,0625}}{3} + \frac{7,75}{5} = \frac{3,75}{3} + 1,55 = 2,8$ min.

— Trajets extrêmes : nager depuis H ($x = 0$) donne 3 min ; nager depuis S ($x = 10$) donne $\frac{\sqrt{109}}{3} \approx 3,48$ min.

— Le meilleur choix est de courir jusqu'à 2,25 km avant H : c'est le même principe que la **réfraction** de la lumière.

Réponse. b) $x = 2,25$ · c) M à 2,25 km de H , durée minimale 2,8 min (contre 3 et $\approx 3,48$ min).

Correction de l'exercice 12 - Une tangente horizontale sans extremum

a) Avec $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $u = 1 + x^2$:

$$f(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

— On reconnaît l'identité remarquable $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

b) Un carré est positif et $1 + x^2 > 0$: $f(x) \geq 0$ pour tout réel x , avec égalité seulement en $x = 1$.

— f est donc **croissante** sur $\mathbb{R}$.

c) En $x = 1$, $f(1) = 0$: la tangente est **horizontale**, mais f ne change pas de signe. Ce n'est **ni un maximum, ni un minimum** : la courbe marque un palier puis repart à la hausse.

— $f(1) = 1 - \ln 2 \approx 0,307$ et $f(2) = 2 - \ln 5 \approx 0,391$: on a bien $f(2) > f(1)$.

— **Piège** : « dérivée nulle » ne signifie pas « extremum ». Il faut un **changement de signe** de la dérivée.

Réponse. b) croissante sur $\mathbb{R}$ · c) tangente horizontale sans extremum ; $f(1) \approx 0,307$, $f(2) \approx 0,391$.

Correction de l'exercice 13 - La chaînette

a) Avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$: $y'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

— $y'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = 0$; y' est négative avant, positive après.

— Point le plus bas : $(0; 1)$.

b) $y(1) = \frac{e + e^{-1}}{2} \approx 1,543$, donc la flèche vaut 0,543 dizaine de mètres, soit environ 5,43 m.

c) On développe, avec $e^x e^{-x} = 1$:

— $y'(x)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$, donc $1 + y'(x)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = y(x)^2$.

— Comme $y > 0$, $\sqrt{1 + y'^2} = y$, et y' est une primitive de y :

$$L = \int_{-1}^1 y(x) dx = [y'(x)]_{-1}^1 = \frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1} - e}{2} = e - e^{-1}$$

— $L \approx 2,350$ dizaines de mètres, soit 23,50 m pour 20 m entre les poteaux.

Réponse. a) point le plus bas $(0; 1)$ · b) flèche $\approx 5,43$ m · c) $L = e - e^{-1} \approx 23,50$ m.

Correction de l'exercice 14 - La période d'un pendule

a) $T(1) = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9,81}} \approx 2,006$ s.

b) $T(L) = 2\pi\sqrt{u}$ avec $u = \frac{L}{g}$ et $u' = \frac{1}{g}$:

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

— $T(L) = 2\pi \times \frac{1/g}{2\sqrt{L/g}} = \frac{\pi}{\sqrt{gL}}$.

— $T(1) = \frac{\pi}{\sqrt{9,81}} \approx 1,003$ s par mètre.

c) Approximation : $T(1,01) \approx T(1) + T'(1) \times 0,01 \approx 2,006 + 0,010 = 2,016$ s.

— Calcul exact : $T(1,01) = 2\pi\sqrt{\frac{1,01}{9,81}} \approx 2,016$ s. Les deux valeurs coïncident au millième.

— **Application** : sur une horloge, un allongement de 1 cm retarde chaque oscillation d'environ 0,01 s, soit près de 7 minutes par jour. C'est pourquoi le balancier se règle par une vis.

Réponse. a) $\approx 2,006$ s · b) $T(L) = \frac{\pi}{\sqrt{gL}}$, $T(1) \approx 1,003$ · c) environ +0,010 s.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la croissance d'une plante

a) $t \mapsto -0,5t \mapsto e^X \mapsto -2X \mapsto e^X \mapsto 100X$: deux exponentielles emboîtées.

— $g(0) = 100 e^{-2} \approx 13,5$ cm.

— $e^{-0,5t} \rightarrow 0$, donc $-2 e^{-0,5t} \rightarrow 0$ et $g(t) \rightarrow 100 e^0 = 100$ cm : la hauteur maximale.

b) Étages décroissants : $-0,5t$ et $-2X$; les autres sont croissants. Deux étages décroissants : g est **croissante**.

c) Avec $u(t) = -2 e^{-0,5t}$, $u'(t) = -2 \times (-0,5) e^{-0,5t} = e^{-0,5t}$:

$$g'(t) = 100 u'(t) e^{u(t)} = 100 e^{-0,5t} e^{-2e^{-0,5t}}$$

— Strictement positive : on retrouve b).

d) On remonte les étages :

$$\text{— } e^{-2e^{-0,5t}} = 0,9 \Leftrightarrow -2e^{-0,5t} = \ln 0,9 \Leftrightarrow e^{-0,5t} = -\frac{\ln 0,9}{2} \approx 0,052\,68.$$

$$\text{— } t = -2 \ln(0,052\,68) \approx 5,9 \text{ semaines.}$$

Réponse. a) $g(0) \approx 13,5$ cm ; limite 100 cm · c) $g'(t) = 100 e^{-0,5t} e^{-2e^{-0,5t}}$ · d) $\approx 5,9$ semaines.