

## Plaquette 2 - Composer et décomposer : images, domaines, variations

### Composition de fonctions — Terminale STI2D

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Composer une fonction, c'est enchaîner deux calculs.

- Définition :  $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ , où  $u(x)$  doit appartenir à l'ensemble de définition de  $f$ .
- **L'ordre compte** : en général  $f \circ u \neq u \circ f$ . Dans  $f \circ u$ , on applique  $u$  **en premier**.
- **Ensemble de définition** de  $f \circ u$  : les  $x$  pour lesquels  $u(x)$  existe **et**  $u(x)$  est dans le domaine de  $f$ .
- $\sqrt{u(x)}$  : il faut  $u(x) \geq 0$  ;
- $\ln(u(x))$  : il faut  $u(x) > 0$  ;
- $\frac{1}{u(x)}$  : il faut  $u(x) \neq 0$ .
- **Variations sans dériver** (sur un intervalle où  $u$  est monotone) :  
 $f$  croissante :  $f \circ u$  a le même sens que  $u$       $f$  décroissante :  $f \circ u$  a le sens contraire
- Fonctions croissantes utiles :  $e^X$ ,  $\ln X$ ,  $\sqrt{X}$ ,  $X \mapsto aX + b$  avec  $a > 0$ . Décroissante utile :  $X \mapsto \frac{1}{X}$  sur  $]0; +\infty[$ .
- **Réciproques** :  $\ln(e^x) = x$  pour tout réel  $x$  et  $e^{\ln x} = x$  pour  $x > 0$ .
- **Limite d'une composée** : on cherche la limite  $L$  de l'étage intérieur, puis la limite de  $f(X)$  quand  $X$  tend vers  $L$ .

#### Correction de l'exercice 1 - Composer à partir de tableaux

On applique la définition, en commençant **par l'intérieur** :

$$(f \circ u)(x) = f(u(x))$$

a) On lit  $u(x)$ , puis on cherche l'image de ce nombre par  $f$  :

- $(f \circ u)(0) = f(2) = -1$  ;
- $(f \circ u)(1) = f(3) = 0$  ;
- $(f \circ u)(2) = f(0) = 5$  ;
- $(f \circ u)(3) = f(1) = 4$ .

b)  $(u \circ f)(1) = u(f(1)) = u(4)$  : le nombre 4 n'est pas dans le tableau de  $u$ , on **ne peut pas** conclure.

- $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(0) = 5$  : cette fois le calcul aboutit.
- **À retenir** : la composée n'existe que si le résultat du premier calcul est une valeur que la seconde fonction sait traiter.

**Réponse.** a)  $-1$  ;  $0$  ;  $5$  ;  $4$  · b)  $(u \circ f)(1)$  incalculable ;  $(f \circ f)(3) = 5$ .

#### Correction de l'exercice 2 - Dans un sens, puis dans l'autre

a) **Pour**  $f \circ u$  : on calcule d'abord  $x^2 + 1$ , puis on en prend l'inverse.

$$(f \circ u)(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

—  $x^2 + 1 \geq 1$  n'est jamais nul :  $f \circ u$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

**Pour  $u \circ f$  :** on prend d'abord l'inverse de  $x$ , puis on l'élève au carré et on ajoute 1.

$$(u \circ f)(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1$$

— Il faut  $x \neq 0$  :  $u \circ f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

b)  $(f \circ u)(2) = \frac{1}{5} = 0,2$  et  $(u \circ f)(2) = \frac{1}{4} + 1 = 1,25$ .

— Les deux composées sont **différentes**, et n'ont même pas le même ensemble de définition.

**Réponse.** a)  $\frac{1}{x^2 + 1}$  sur  $\mathbb{R}$  ;  $\frac{1}{x^2} + 1$  sur  $\mathbb{R}^*$  · b) 0,2 et 1,25.

### Correction de l'exercice 3 - Décomposer en étages

On lit l'expression comme un calcul à la calculatrice : l'opération faite **en dernier** est la fonction extérieure.

a)  $x \mapsto \sqrt{x} \mapsto \sqrt{x} + 1 \mapsto e^{\sqrt{x} + 1}$  : trois étages, l'exponentielle en dernier.

b)  $x \mapsto e^x \mapsto 1 + e^x \mapsto \ln(1 + e^x)$ .

c)  $x \mapsto \ln x \mapsto (\ln x)^2$  : on prend le logarithme, **puis** on élève au carré.

d)  $x \mapsto x^2 \mapsto \ln(x^2)$  : on élève au carré, **puis** on prend le logarithme.

e)  $t \mapsto 3t \mapsto \cos(3t) \mapsto (\cos(3t))^2$ .

— Pour e), avec  $u(t) = \cos(3t)$  et  $f(X) = X^2$ , on a bien :

$$\cos^2(3t) = f(u(t))$$

— **Le piège de c) et d)** : les mêmes symboles, dans un ordre différent, donnent deux fonctions différentes (voir l'exercice suivant).

**Réponse.** L'ordre des étages : a) racine, +1, exp · b) exp, +1, ln · c) ln, carré · d) carré, ln · e)  $\times 3$ , cos, carré.

### Correction de l'exercice 4 - $(\ln x)^2$ n'est pas $\ln(x^2)$

a)  $g$  : il faut  $x > 0$  pour le logarithme, donc  $]0; +\infty[$ .

—  $h$  : il faut  $x^2 > 0$ , soit  $x \neq 0$ , donc  $\mathbb{R}^*$ . Les **nombre négatifs** sont permis, puisqu'on les élève au carré avant le logarithme.

b) Avec  $\ln e = 1$  et  $\ln(e^2) = 2$  :

—  $g(e) = 1^2 = 1$  et  $h(e) = \ln(e^2) = 2$  ;

—  $g(e^2) = 2^2 = 4$  et  $h(e^2) = \ln(e^4) = 4$  ;

—  $g(-1)$  n'existe pas ;  $h(-1) = \ln 1 = 0$ .

c) Pour  $x > 0$ ,  $h(x) = 2 \ln x$ . On pose  $L = \ln x$  :

$$L^2 = 2L \Leftrightarrow L(L - 2) = 0 \Leftrightarrow L = 0 \text{ ou } L = 2$$

—  $\ln x = 0$  donne  $x = 1$  ;  $\ln x = 2$  donne  $x = e^2$ .

— Les deux fonctions ne coïncident qu'en **deux points** : l'égalité en  $e^2$  trouvée en b) était une coïncidence.

**Réponse.** a)  $]0; +\infty[$  et  $\mathbb{R}^*$  · b) 1 et 2 ; 4 et 4 ;  $g(-1)$  n'existe pas,  $h(-1) = 0$  · c)  $x = 1$  ou  $x = e^2$ .

## Correction de l'exercice 5 - Ensembles de définition

On écrit la **condition** imposée par la fonction extérieure, puis on la résout.

- a) Racine : il faut  $6 - 2x \geq 0$ , soit  $x \leq 3$ . Domaine :  $] - \infty ; 3]$ .
- b) Logarithme : il faut  $3x - 12 > 0$ , soit  $x > 4$ . Domaine :  $]4 ; +\infty[$ .
- c)  $x^2 + 1 \geq 1 > 0$  pour tout réel  $x$  : domaine  $\mathbb{R}$ .
- d) Il faut  $e^x - 1 \neq 0$ . Or

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

— Domaine :  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

e) Deux conditions **simultanées** :  $5 - x > 0$  (soit  $x < 5$ ) et  $x \geq 0$ .

— Domaine :  $[0 ; 5[$ .

— **Piège** : pour la racine, l'inégalité est **large** ( $\geq 0$ , car  $\sqrt{0} = 0$ ) ; pour le logarithme, elle est **stricte** ( $> 0$ , car  $\ln 0$  n'existe pas).

**Réponse.** a)  $] - \infty ; 3]$  · b)  $]4 ; +\infty[$  · c)  $\mathbb{R}$  · d)  $\mathbb{R}^*$  · e)  $[0 ; 5[$ .

## Correction de l'exercice 6 - Un logarithme de quotient

Le logarithme impose que la quantité intérieure soit **strictement positive** :

$$\frac{x-1}{x+2} > 0$$

On étudie le signe de chaque facteur :  $x - 1$  s'annule en 1,  $x + 2$  en  $-2$  (valeur interdite).

| Intervalle | $] - \infty ; -2[$ | $] - 2 ; 1[$ | $]1 ; +\infty[$ |
|------------|--------------------|--------------|-----------------|
| $x - 1$    | —                  | —            | +               |
| $x + 2$    | —                  | +            | +               |
| quotient   | +                  | —            | +               |

- Le quotient est strictement positif sur  $] - \infty ; -2[$  et sur  $]1 ; +\infty[$  (il est nul en 1, et n'existe pas en  $-2$ ).
- Domaine de  $f$  :  $] - \infty ; -2[ \cup ]1 ; +\infty[$ .
- **Erreur fréquente** : écrire  $\ln(x - 1) - \ln(x + 2)$  dès le départ. Cette écriture exige  $x > 1$  et **perd** tout l'intervalle  $] - \infty ; -2[$ , où  $f$  est pourtant bien définie.

**Réponse.**  $] - \infty ; -2[ \cup ]1 ; +\infty[$ .

## Correction de l'exercice 7 - Lire une composée sur un graphique

- a) On lit  $u(0) = 5$ ,  $u(2) = 1$ ,  $u(4) = 5$ .
- b) On applique la fonction extérieure au nombre lu :
  - $\ln(u(2)) = \ln 1 = 0$  ;
  - $\ln(u(0)) = \ln 5 \approx 1,609$  ;
  - $e^{u(2)} = e^1 = e$ .
- c) Sur  $[0 ; 4]$ , la courbe est au-dessus de la droite  $y = 1$  :  $u(x) \geq 1 > 0$ , donc  $\ln(u(x))$  existe.
- d) On applique la règle des variations des composées :

$f$  croissante : même sens que  $u$        $f$  décroissante : sens contraire

—  $u$  décroît sur  $[0 ; 2]$  et croît sur  $[2 ; 4]$ .

- $\ln$  est croissante :  $g$  **décroît** sur  $[0; 2]$  et **croît** sur  $[2; 4]$ . Minimum  $g(2) = 0$ , maximum  $g(0) = g(4) = \ln 5$ .
- $X \mapsto \frac{1}{X}$  est décroissante sur  $]0; +\infty[$  :  $k$  **croît** sur  $[0; 2]$  et **décroît** sur  $[2; 4]$ . Maximum  $k(2) = 1$ , minimum  $k(0) = k(4) = 0,2$ .

**Réponse.** a) 5 ; 1 ; 5 · b) 0 ;  $\approx 1,609$  ; e · d)  $g$  : décroissante puis croissante, min 0 ;  $k$  : croissante puis décroissante, max 1.

### Correction de l'exercice 8 - Des variations sans dériver

On décompose, on donne le sens de chaque étage, puis on applique la règle : un étage croissant **conserve** le sens, un étage décroissant **l'inverse**.

a)  $x \mapsto 9 - x^2 \mapsto \sqrt{9 - x^2}$ .

- $9 - x^2$  croît sur  $[-3; 0]$  et décroît sur  $[0; 3]$  ; la racine est croissante.
- Donc  $g$  croît sur  $[-3; 0]$  et décroît sur  $[0; 3]$ , avec un maximum  $g(0) = 3$ . (Sa courbe est un demi-cercle de rayon 3.)

b)  $x \mapsto e^x \mapsto 1 + e^x \mapsto \frac{1}{1 + e^x}$ .

- Les deux premiers étages sont croissants ; le dernier (inverse, sur  $]0; +\infty[$ ) est décroissant.
- Un seul étage décroissant :  $h$  est **décroissante** sur  $\mathbb{R}$ .

c)  $x \mapsto \frac{1}{x} \mapsto e^{1/x}$ .

- L'inverse est décroissant sur  $]0; +\infty[$ , l'exponentielle croissante :  $k$  est **décroissante**.
- **Règle de comptage** : la composée est décroissante quand le nombre d'étages décroissants est **impair**.

**Réponse.** a) croissante puis décroissante, max 3 · b) décroissante · c) décroissante.

### Correction de l'exercice 9 - Enchaîner des conversions

a) On remplace  $C$  par son expression en fonction de  $K$  :

$$F = 1,8(K - 273,15) + 32 = 1,8K - 491,67 + 32 = 1,8K - 459,67$$

- On a calculé  $f \circ u$  avec  $u(K) = K - 273,15$  (appliquée en premier) et  $f(C) = 1,8C + 32$ .
- La composée de deux fonctions affines est **affine**, et son coefficient est le produit des coefficients :  $1,8 \times 1 = 1,8$ .

b)  $F = 1,8 \times 300 - 459,67 = 80,33$  °F.

- Contrôle en deux temps :  $300 - 273,15 = 26,85$  °C, puis  $1,8 \times 26,85 + 32 = 80,33$ . Même résultat.

c) On résout  $1,8K - 459,67 = 98,6$  :

—  $1,8K = 558,27$ , donc  $K = 310,15$  K (soit 37 °C).

**Réponse.** a)  $F = 1,8K - 459,67$  · b) 80,33 °F · c) 310,15 K.

### Correction de l'exercice 10 - Exponentielle et logarithme s'annulent

Les fonctions  $\exp$  et  $\ln$  sont **réciroques** : composées l'une avec l'autre, elles se neutralisent.

$$\ln(e^X) = X \quad e^{\ln X} = X \quad (X > 0)$$

a)  $2 \ln 3 = \ln(3^2) = \ln 9$ , donc  $e^{2 \ln 3} = e^{\ln 9} = 9$ .

b)  $\ln(e^{-4}) = -4$ .

c)  $\ln x + \ln 2 = \ln(2x)$ , donc  $e^{\ln x + \ln 2} = 2x$ .

d)  $\sqrt{e} = e^{1/2}$ , donc  $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ .

e)  $-\ln 5 = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ , donc  $e^{-\ln 5} = \frac{1}{5} = 0,2$ .

— **Méthode** : avant de neutraliser, on ramène l'exposant à la forme «  $\ln$  de quelque chose » grâce aux règles  $n \ln a = \ln(a^n)$  et  $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ .

**Réponse.** a)  $9 \cdot$  b)  $-4 \cdot$  c)  $2x \cdot$  d)  $\frac{1}{2} \cdot$  e)  $0,2$ .

### Correction de l'exercice 11 - Un signal sinusoïdal

a) On pose  $u(t) = 100\pi t - \frac{\pi}{2}$  (étage affine, appliqué en premier) et  $f(X) = 3 \sin X$ .

$$s(t) = f(u(t)) = 3 \sin(u(t))$$

b) Pour un signal  $A \sin(\omega t + \varphi)$  :

— amplitude  $A = 3 \text{ V}$  ; pulsation  $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$  ;

— période  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02 \text{ s}$  ;

— fréquence  $\frac{1}{T} = 50 \text{ Hz}$  (celle du réseau électrique).

— **Interprétation de la composition** : l'étage affine  $u$  « accélère » le temps d'un facteur  $100\pi$  et le décale de  $\frac{\pi}{2}$  ; la fonction  $\sin$  ne fait que produire l'oscillation.

c)  $s(0) = 3 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3 \times (-1) = -3 \text{ V}$ .

—  $s(0,005) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin 0 = 0 \text{ V}$  : un quart de période après son minimum, le signal repasse par 0.

**Réponse.** b)  $3 \text{ V}$  ;  $100\pi \text{ rad/s}$  ;  $0,02 \text{ s}$  ;  $50 \text{ Hz}$  · c)  $-3 \text{ V}$  et  $0 \text{ V}$ .

### Correction de l'exercice 12 - Reconnaître trois courbes

a) On applique la condition du logarithme à ce qui est à l'intérieur :

—  $f : x > 0$ , et  $f(1) = \ln 1 = 0$  ;

—  $g : x + 2 > 0$ , soit  $x > -2$ , et  $g(1) = \ln 3 \approx 1,10$  ;

—  $h : x > 0$  (le  $+2$  est à l'extérieur), et  $h(1) = 0 + 2 = 2$ .

b) Seule  $g$  existe pour  $x$  négatif : c'est  $C_2$ , en pointillés, qui commence près de  $x = -2$ .

— Parmi les deux autres, celle qui passe par  $(1 ; 2)$  est  $h$  : c'est  $C_1$ . La courbe  $C_3$ , qui passe par  $(1 ; 0)$ , est  $f$ .

c)  $g(x) = \ln(x + 2) = \ln(u(x))$  avec  $u(x) = x + 2$  appliquée **avant** le logarithme : sa courbe est celle de  $\ln$  **décalée de 2 vers la gauche**.

—  $h(x) = \ln x + 2$  ajoute 2 **après** le logarithme : sa courbe est celle de  $\ln$  **décalée de 2 vers le haut**.

$$\ln(x + 2) \neq \ln x + 2$$

**Réponse.** a)  $f : ]0 ; +\infty[$ ,  $0 \cdot g : ]-2 ; +\infty[$ ,  $\ln 3 \cdot h : ]0 ; +\infty[$ ,  $2 \cdot$  b)  $C_1 : h$ ,  $C_2 : g$ ,  $C_3 : f \cdot$  c)  $g$ .

### Correction de l'exercice 13 - Limites de composées

Méthode : on cherche la limite  $L$  de l'étage **intérieur**, puis la limite de la fonction

extérieure quand sa variable tend vers  $L$ .

a)  $-\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , et  $e^x \rightarrow e^0 = 1$  quand  $x \rightarrow 0$ . Limite : 1.

b)  $1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$ , et  $\ln x \rightarrow \ln 1 = 0$ . Limite : 0.

c)  $-0,5x \rightarrow -\infty$  et  $e^x \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow -\infty$ , donc  $e^{-0,5x} \rightarrow 0$ . Limite : 3.

d)  $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$  et  $\ln x \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Limite :  $+\infty$ .

e)  $1 + e^x \rightarrow +\infty$  et  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ . Limite : 0.

— **Rédaction type** pour a) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1/x} = 1$$

**Réponse.** a) 1 · b) 0 · c) 3 · d)  $+\infty$  · e) 0.

### Correction de l'exercice 14 - L'eau bout moins chaud en montagne

a) On remplace  $p$  par  $p(h)$  dans l'expression de  $T$  :

$$E(h) = 100 + 0,028(1\,013 e^{-0,000\,12h} - 1\,013) = 100 - 28,364(1 - e^{-0,000\,12h})$$

b)  $p(4\,800) = 1\,013 e^{-0,576} \approx 569,5$  hPa.

—  $E(4\,800) = 100 + 0,028 \times (569,5 - 1\,013) \approx 87,6$  °C.

c)  $p$  est décroissante (exponentielle de coefficient négatif) et  $T$  est croissante (affine de coefficient  $0,028 > 0$ ). Un seul étage décroissant :  $E$  est **décroissante**. Plus on monte, plus l'eau bout à basse température.

d) On résout  $E(h) = 90$  :

—  $28,364(1 - e^{-0,000\,12h}) = 10$ , donc  $e^{-0,000\,12h} = 1 - \frac{10}{28,364} \approx 0,6474$ .

—  $h = -\frac{\ln 0,6474}{0,000\,12} \approx 3\,620$  m.

**Réponse.** a)  $E(h) = 100 - 28,364(1 - e^{-0,000\,12h})$  · b)  $\approx 87,6$  °C · d) vers 3 620 m.

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une composée à trois étages

a)  $1 + e^{-x} > 1 > 0$  pour tout  $x$  : le logarithme est défini sur  $\mathbb{R}$ .

— Étages :  $x \mapsto e^{-x} \mapsto 1 + e^{-x} \mapsto \ln(1 + e^{-x})$ .

b)  $e^{-x}$  est décroissante ;  $X \mapsto 1 + X$  et  $\ln$  sont croissantes. Un seul étage décroissant :  $h$  est **décroissante** sur  $\mathbb{R}$ .

c) En  $+\infty$  :  $e^{-x} \rightarrow 0$ , donc  $1 + e^{-x} \rightarrow 1$  et  $h(x) \rightarrow \ln 1 = 0$ .

— En  $-\infty$  :  $e^{-x} \rightarrow +\infty$ , donc  $h(x) \rightarrow +\infty$ .

d)  $h(0) = \ln 2 \approx 0,693$  ;  $h(2) = \ln(1 + e^{-2}) \approx 0,127$  ;  $h(-2) = \ln(1 + e^2) \approx 2,127$ .

e) On factorise  $e^{-x}$  à l'intérieur :

$$1 + e^{-x} = e^{-x}(e^x + 1)$$

— Donc  $h(x) = \ln(e^{-x}) + \ln(1 + e^x) = -x + \ln(1 + e^x)$ .

— Contrôle avec d) :  $h(-2) = 2 + \ln(1 + e^{-2}) = 2 + h(2)$ , et en effet  $2,127 = 2 + 0,127$ .

**Réponse.** b) décroissante · c) 0 en  $+\infty$ ,  $+\infty$  en  $-\infty$  · d) 0,693 ; 0,127 ; 2,127.