

Plaquette 1 - Composer, dériver et primitiver $u'f(u)$

Composition de fonctions — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— **Composée** : $(f \circ u)(x) = f(u(x))$; on calcule d'abord $u(x)$, puis on applique f .

— **Dérivée d'une composée** :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

— Cas particuliers à connaître :

$$(e^u)' = u' e^u \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u^n)' = n u' u^{n-1} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

— $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$ et $(\sin(u))' = u' \cos(u)$.

— **Primitives** (lecture inverse des formules ci-dessus) :

Forme	Primitive
$u' e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$ (avec $u > 0$)	$\ln u$
$u' u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

— **Méthode** : pour primitiver, on pose u , on calcule u' , et on vérifie que l'expression est bien de l'une des formes ci-dessus — au besoin en **ajustant un coefficient**.

— Contrôle systématique : on dérive la primitive obtenue.

Correction de l'exercice 1 - Calculer des images composées

- a) On calcule d'abord $u(3) = 7$, puis $f(7) = 49$. Donc $(f \circ u)(3) = 49$.
- b) On calcule d'abord $f(3) = 9$, puis $u(9) = 19$. Donc $(u \circ f)(3) = 19$.
- c) **Non** : $49 \neq 19$. La composition n'est **pas commutative**, l'ordre est essentiel.
- Expressions générales : $(f \circ u)(x) = (2x + 1)^2$ et $(u \circ f)(x) = 2x^2 + 1$.

Réponse. a) 49 · b) 19 · c) non, la composition n'est pas commutative.

Correction de l'exercice 2 - Identifier u et f

On repère la « fonction intérieure » u et la « fonction extérieure » f .

- a) $u(x) = 3x - 1$ et $f(X) = e^X$.
- b) $u(x) = x^2 + 1$ et $f(X) = \ln X$.
- c) $u(x) = 5x + 2$ et $f(X) = \sqrt{X}$.
- d) $u(x) = 4x - 3$ et $f(X) = X^5$.
- Cette identification est l'étape indispensable avant toute dérivation.

Réponse. a) $3x - 1$ et e^X · b) $x^2 + 1$ et $\ln X$ · c) $5x + 2$ et $\sqrt{X}$ · d) $4x - 3$ et X^5 .

Correction de l'exercice 3 - Dériver une exponentielle composée

Formule du cours : $(e^u)' = u' e^u$.

a) $u = 5x, u' = 5 : f(x) = 5e^{5x}$.

b) $u = -0,2x, u' = -0,2 : g(x) = -0,2e^{-0,2x}$.

c) $u = x^2, u' = 2x : h(x) = 2xe^{x^2}$.

Piège. On n'oublie pas le facteur u' : la dérivée de e^{5x} n'est pas e^{5x} .

Réponse. a) $5e^{5x}$ · b) $-0,2e^{-0,2x}$ · c) $2xe^{x^2}$.

Correction de l'exercice 4 - Dériver un logarithme composé

Formule du cours : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

— a) $u = 3x + 4, u' = 3 : f(x) = \frac{3}{3x+4}$.

— b) $u = x^2 + 1, u' = 2x : g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

— c) $u = e^x + 1, u' = e^x : h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

— Remarque sur b) : le dénominateur $x^2 + 1$ est toujours strictement positif, donc g est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et g' a le signe de x .

Réponse. a) $\frac{3}{3x+4}$ · b) $\frac{2x}{x^2+1}$ · c) $\frac{e^x}{e^x+1}$.

Correction de l'exercice 5 - Dériver une puissance et une racine

a) Formule $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ avec $u = 2x + 3, u' = 2, n = 4$:

$$f'(x) = 4 \times 2 \times (2x + 3)^3 = 8(2x + 3)^3$$

b) Formule $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = 4x + 1, u' = 4$:

$$g'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$$

Réponse. a) $8(2x + 3)^3$ · b) $\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$.

Correction de l'exercice 6 - Dériver une composée trigonométrique

Formules du cours : $(\cos u)' = -u' \sin u$ et $(\sin u)' = u' \cos u$.

— Pour u : la fonction intérieure est $100\pi t$, de dérivée 100π , donc

$$u'(t) = 12 \times (-100\pi \sin(100\pi t)) = -1200\pi \sin(100\pi t)$$

— Pour i : la fonction intérieure est $50t + 1$, de dérivée 50, donc

$$i'(t) = 3 \times 50 \cos(50t + 1) = 150 \cos(50t + 1).$$

— Application physique : si u est une tension, u' intervient dans le courant d'un condensateur, $i = C u'$.

Réponse. $u'(t) = -1200\pi \sin(100\pi t)$ et $i'(t) = 150 \cos(50t + 1)$.

Correction de l'exercice 7 - Primitive de la forme $u'e^u$

Forme du cours : une primitive de $u'e^u$ est e^u .

— a) Avec $u = x^2$, on a $u' = 2x$: l'expression est exactement $u'e^u$, donc $F(x) = e^{x^2}$.

- b) Avec $u = 3x$, $u' = 3$: il manque le facteur 3. On **ajuste** : $e^{3x} = \frac{1}{3} \times 3e^{3x}$, donc $G(x) = \frac{e^{3x}}{3}$.
- c) Avec $u = x^2$, $u' = 2x$: on a $xe^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$, donc $H(x) = \frac{e^{x^2}}{2}$.
- Contrôle de c) : $H'(x) = \frac{2xe^{x^2}}{2} = xe^{x^2} = h(x)$. Correct.

Réponse. a) e^{x^2} · b) $\frac{e^{3x}}{3}$ · c) $\frac{e^{x^2}}{2}$.

Correction de l'exercice 8 - Primitive de la forme u'/u

Forme du cours : une primitive de $\frac{u'}{u}$ (avec $u > 0$) est $\ln u$.

- a) $u = x^2 + 1$ et $u' = 2x$: l'expression est exactement $\frac{u'}{u}$, donc $F(x) = \ln(x^2 + 1)$.
- b) $u = 2x + 5$, $u' = 2$: il manque le facteur 2, donc $G(x) = \frac{1}{2} \ln(2x + 5)$.
- c) $u = x^2 + 3$, $u' = 2x$: on écrit $\frac{x}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 3}$, donc $H(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3)$.
- Contrôle de b) : $G'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x + 5} = \frac{1}{2x + 5}$. Correct.

Réponse. a) $\ln(x^2 + 1)$ · b) $\frac{1}{2} \ln(2x + 5)$ · c) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 3)$.

Correction de l'exercice 9 - Primitive de la forme $u'u^n$

Forme du cours : une primitive de $u'u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

- a) $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$, $n = 3$: l'expression est exactement $u'u^3$, donc

$$F(x) = \frac{(x^2 + 1)^4}{4}$$

- b) $u = 3x + 2$, $u' = 3$, $n = 4$: il manque le facteur 3, donc

$$G(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(3x + 2)^5}{5} = \frac{(3x + 2)^5}{15}$$

- Contrôle de b) : $G'(x) = \frac{5 \times 3 \times (3x + 2)^4}{15} = (3x + 2)^4 = g(x)$. Correct.

Réponse. a) $\frac{(x^2 + 1)^4}{4}$ · b) $\frac{(3x + 2)^5}{15}$.

Correction de l'exercice 10 - Primitive de la forme $u'/\sqrt{u}$

- a) Avec $u = x^2 + 16 > 0$ et $u' = 2x$, on fait apparaître la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, de primitive $2\sqrt{u}$:

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 16}}.$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2 + 16} = \sqrt{x^2 + 16}$$

- Contrôle : $F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$. Correct.

$$b) \int_0^3 f(x) dx = F(3) - F(0) = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1.$$

- Le coefficient $\frac{1}{2}$ et le facteur 2 de la formule se compensent : c'est pourquoi la primitive est si simple.

Réponse. a) $F(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ · b) 1.

Correction de l'exercice 11 - Exponentielle et logarithme dans les deux sens

a) On applique d'abord u , puis $\ln$:

$$(f \circ u)(x) = \ln(e^{2x} + 1)$$

- $e^{2x} + 1 > 1 > 0$ pour tout réel x : $f \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b) On applique d'abord $\ln$, puis u : $(u \circ f)(x) = e^{2\ln x} + 1$.

- $2\ln x = \ln(x^2)$ et $e^{\ln X} = X$, donc $(u \circ f)(x) = x^2 + 1$, pour $x > 0$ seulement.

c) $(f \circ u)(1) = \ln(e^2 + 1) \approx 2,127$ et $(u \circ f)(1) = 1 + 1 = 2$.

- Les deux résultats diffèrent : l'ordre de composition compte, même avec des fonctions réciproques.

Réponse. a) $\ln(e^{2x} + 1)$ sur $\mathbb{R}$ · b) $x^2 + 1$ · c) $\approx 2,127$ et 2.

Correction de l'exercice 12 - Intégrale d'une composée

- On a vu qu'une primitive de xe^{x^2} est $\frac{e^{x^2}}{2}$.

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2}$$

- Valeur approchée : $\frac{2,718 - 1}{2} \approx 0,859$.

- Contrôle de vraisemblance : sur $[0; 1]$, la fonction varie de 0 à $e \approx 2,72$; une aire d'environ 0,86 est plausible.

Réponse. $\frac{e-1}{2} \approx 0,859$.

Correction de l'exercice 13 - Variations d'une composée

a) Avec $u = -x^2$, $u' = -2x$:

$$f(x) = -2xe^{-x^2}$$

b) L'exponentielle étant strictement positive, le signe de f est celui de $-2x$: positif pour $x < 0$, négatif pour $x > 0$.

Intervalle	$] -\infty ; 0]$	$[0 ; +\infty[$
Signe de $f(x)$	+	-
Variations de f	croissante	décroissante

- Maximum en $x = 0$: $f(0) = e^0 = 1$.

- La courbe obtenue est la fameuse **courbe en cloche**, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Réponse. a) $f(x) = -2xe^{-x^2}$ · b) croissante puis décroissante ; maximum 1 en $x = 0$.

Correction de l'exercice 14 - Problème : puissance instantanée

a) $p(t) = 10e^{-20t} \times 0,5e^{-20t} = 5e^{-40t}$ (en watts).

— On additionne les exposants : $e^{-20t} \times e^{-20t} = e^{-40t}$.

b) $p(0) = 5 \text{ W}$.

— $p(0,05) = 5e^{-2} \approx 5 \times 0,13534 \approx 0,68 \text{ W}$.

c) L'énergie est l'intégrale de la puissance. Une primitive de $5e^{-40t}$ est $-\frac{5e^{-40t}}{40} = -\frac{e^{-40t}}{8}$.

$$E = \int_0^{0,05} 5e^{-40t} dt = \left[-\frac{e^{-40t}}{8} \right]_0^{0,05} = -\frac{e^{-2}}{8} + \frac{1}{8}$$

— $= \frac{1 - 0,13534}{8} \approx \frac{0,86466}{8} \approx 0,108 \text{ J}$.

Réponse. a) $p(t) = 5e^{-40t}$ · b) 5 W et $\approx 0,68 \text{ W}$ · c) $E \approx 0,108 \text{ J}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude complète

a) $x^2 + 4 \geq 4 > 0$ pour tout réel x : le logarithme est donc toujours défini, et f l'est sur $\mathbb{R}$.

b) Avec $u = x^2 + 4$ et $u' = 2x$:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

— Le dénominateur est strictement positif, donc f a le signe de $2x$: négatif pour $x < 0$, positif pour $x > 0$.

Intervalle	$] -\infty ; 0]$	$[0 ; +\infty[$
Signe de $f(x)$	–	+
Variations de f	décroissante	croissante

c) $f(0) = \ln 4 \approx 1,386$.

— $f(2) = \ln 8 \approx 2,079$.

— Le **minimum** de f est donc $\ln 4 \approx 1,386$, atteint en $x = 0$.

— Cohérent : $x^2 + 4$ est minimal en 0, et $\ln$ étant croissante, elle atteint son minimum au même endroit.

Réponse. a) $x^2 + 4 > 0$ · b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$, décroissante puis croissante · c) minimum $\ln 4 \approx 1,386$.