

Plaquette 3 - Dériver une composée : chaîne, tangentes, signaux

Composition de fonctions — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivée d'une composée et formules associées.

— Règle de la chaîne :

$$(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$$

— Cas affine : $(f(ax + b))' = a f'(ax + b)$.

— Formules usuelles :

$$(e^u)' = u' e^u \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u^n)' = n u' u^{n-1} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

— Signaux : $(\cos(\omega t + \varphi))' = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$ et $(\sin(\omega t + \varphi))' = \omega \cos(\omega t + \varphi)$.

— Produit et quotient : $(uv)' = u'v + uv'$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

— Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

— Physique : la vitesse est la dérivée de la position, l'intensité dans un condensateur vaut $i = C \frac{du}{dt}$.

— **Réflexe** : e^u est toujours strictement positive, donc le signe de $u' e^u$ est celui de u' .

Correction de l'exercice 1 - Composées avec une fonction affine

Quand l'étage intérieur est affine, $u(x) = ax + b$, la règle de la chaîne se réduit à :

$$(f(ax + b))' = a f'(ax + b)$$

a) $a = 2$ et $f(X) = X^4$: $4 \times 2(2x - 3)^3 = 8(2x - 3)^3$.

b) $a = -2$ et $f = \exp$: $-2e^{5-2x}$.

c) $a = 4$ et $f = \ln$: $\frac{4}{4x+1}$.

d) $a = 3$ et f la racine carrée : $\frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$.

e) $a = 2$ et $f = \sin$: $2 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$.

— **Contrôle rapide** : dans chaque résultat on doit voir apparaître le coefficient a de l'étage intérieur. S'il manque, la dérivée est fautive.

Réponse. a) $8(2x - 3)^3$ · b) $-2e^{5-2x}$ · c) $\frac{4}{4x+1}$ · d) $\frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$ · e) $2 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Correction de l'exercice 2 - Trouver l'erreur

Les quatre erreurs sont la même : l'élève a dérivé la fonction extérieure mais **oublié de multiplier par u'** .

$$(f(u))' = u' \times f'(u)$$

a) $u = x^2$, $u' = 2x$: $(e^{x^2})' = 2x e^{x^2}$.

b) $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$: $(\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

c) $u = 3x + 1, u' = 3 : ((3x + 1)^5)' = 15(3x + 1)^4.$

d) $u = -x, u' = -1 : (e^{-x})' = -e^{-x}.$

— **Test pour détecter l'erreur** : en d), e^{-x} est décroissante, sa dérivée doit donc être négative. La réponse de l'élève, toujours positive, est impossible.

Réponse. a) $2xe^{x^2} \cdot$ b) $\frac{2x}{x^2 + 1} \cdot$ c) $15(3x + 1)^4 \cdot$ d) $-e^{-x}.$

Correction de l'exercice 3 - Un produit avec une composée

a) f est un produit $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-2x}$:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

— $u'(x) = 1$ et, par la règle de la chaîne, $v'(x) = -2e^{-2x}.$

— $f'(x) = e^{-2x} + x \times (-2e^{-2x}) = (1 - 2x)e^{-2x}.$

b) $e^{-2x} > 0$: le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2x$.

Intervalle	$] -\infty ; \frac{1}{2}]$	$[\frac{1}{2} ; +\infty [$
Signe de $f'(x)$	+	-
Variations de f	croissante	décroissante

— Maximum en $x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e} \approx 0,184.$

— **Méthode** : on factorise toujours par l'exponentielle ; le signe se lit alors sur le facteur restant.

Réponse. a) $f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x} \cdot$ b) maximum $\frac{1}{2e} \approx 0,184$ en $x = \frac{1}{2}.$

Correction de l'exercice 4 - Un quotient d'exponentielles

a) Quotient $\frac{u}{v}$ avec $u = e^{2x}$ et $v = 1 + e^{2x}$, donc $u' = v' = 2e^{2x}$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

— Numérateur : $2e^{2x}(1 + e^{2x}) - e^{2x} \times 2e^{2x} = 2e^{2x} + 2e^{4x} - 2e^{4x} = 2e^{2x}.$

— $g'(x) = \frac{2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}.$

b) Numérateur et dénominateur sont strictement positifs : $g' > 0$, donc g est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

c) $g(0) = \frac{1}{1 + 1} = 0,5$ et $g'(0) = \frac{2}{2^2} = 0,5.$

— **Remarque** : $e^{4x} = (e^{2x})^2$; les termes en e^{4x} s'annulent. Ce type de simplification est systématique avec les quotients d'exponentielles.

Réponse. a) $g'(x) = \frac{2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} \cdot$ b) croissante $\cdot$ c) $g(0) = 0,5$, pente 0,5.

Correction de l'exercice 5 - Tangente à une courbe logarithmique

a) $f(1) = \ln 2 \approx 0,693.$

— Avec $u = 1 + x^2$, $u' = 2x$: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, donc $f(1) = \frac{2}{2} = 1$.

b) Équation de la tangente en $a = 1$:

$$y = f(1)(x - 1) + f(1)$$

— $y = x - 1 + \ln 2$, soit $y \approx x - 0,307$.

c) T coupe l'axe des abscisses quand $y = 0$: $x = 1 - \ln 2 \approx 0,307$. C'est bien ce qu'on lit.

— On remarque aussi que T passe **au-dessus** de la courbe à droite de A : la pente de f diminue après $x = 1$, la courbe « se couche » sous sa tangente.

Réponse. a) $f(1) = \ln 2$, $f'(1) = 1$ · b) $y = x - 1 + \ln 2$ · c) $x = 1 - \ln 2 \approx 0,307$.

Correction de l'exercice 6 - Vitesse et accélération d'un ressort

a) On utilise $(\cos(\omega t))' = -\omega \sin(\omega t)$ avec $\omega = 20$:

— $v(t) = 0,05 \times (-20) \sin(20t) = -\sin(20t)$ (en m/s).

— Puis $(\sin(\omega t))' = \omega \cos(\omega t)$: $a(t) = -20 \cos(20t)$ (en m/s²).

b) $|\sin(20t)| \leq 1$: la vitesse maximale vaut 1 m/s.

— Elle est atteinte quand $|\sin(20t)| = 1$, donc $\cos(20t) = 0$ et $x(t) = 0$: le ressort va le plus vite en passant par sa **position d'équilibre**.

c) $-400x(t) = -400 \times 0,05 \cos(20t) = -20 \cos(20t) = a(t)$.

$$x'' = -\omega^2 x \quad \text{avec } \omega^2 = 400$$

— C'est l'équation de l'**oscillateur harmonique** : l'accélération est proportionnelle à l'écart, et de sens contraire.

Réponse. a) $v(t) = -\sin(20t)$; $a(t) = -20 \cos(20t)$ · b) 1 m/s, à la position d'équilibre.

Correction de l'exercice 7 - Courant dans un condensateur

a) Avec $(\sin(\omega t))' = \omega \cos(\omega t)$ et $\omega = 100\pi$:

$$u'(t) = 230\sqrt{2} \times 100\pi \cos(100\pi t)$$

— $i(t) = 10^{-5} \times 230\sqrt{2} \times 100\pi \cos(100\pi t)$.

b) Amplitude : $10^{-5} \times 230\sqrt{2} \times 100\pi \approx 1,02$ A.

c) u est maximale quand $\sin(100\pi t) = 1$, par exemple en $t = 0,005$ s ; à cet instant $\cos(100\pi t) = 0$, donc $i = 0$.

— i est maximale quand $\cos(100\pi t) = 1$, par exemple en $t = 0$: alors $u = 0$.

— L'intensité est **en avance d'un quart de période** (0,005 s) sur la tension. La dérivation d'un signal sinusoïdal produit exactement ce décalage :

$$\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Réponse. a) $i(t) = 10^{-5} \times 230\sqrt{2} \times 100\pi \cos(100\pi t)$ · b) $\approx 1,02$ A · c) i en avance d'un quart de période.

Correction de l'exercice 8 - Une exponentielle de polynôme

a) Avec $u(x) = x^2 - 4x$, $u'(x) = 2x - 4$:

$$h'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (2x - 4)e^{x^2 - 4x}$$

b) L'exponentielle est strictement positive : $h'(x)$ a le signe de $2x - 4$, qui s'annule en $x = 2$.

Intervalle	$] - \infty ; 2]$	$[2 ; +\infty[$
Signe de $h'(x)$	-	+
Variations de h	décroissante	croissante

- Minimum en $x = 2$: $h(2) = e^{4-8} = e^{-4} \approx 0,0183$.
- **Autre lecture** : $\exp$ est croissante, donc h a les mêmes variations que $u(x) = x^2 - 4x$, parabole de sommet d'abscisse 2. La dérivée confirme ce que la composition annonçait.

Réponse. a) $h'(x) = (2x - 4)e^{x^2-4x}$ · b) minimum $e^{-4} \approx 0,0183$ en $x = 2$.

Correction de l'exercice 9 - Le carré d'un logarithme

a) $k = u^2$ avec $u = \ln x$ et $u' = \frac{1}{x}$:

$$(u^2)' = 2u'u$$

- $k'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x}$.
- b) Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$: $k'(x)$ a le signe de $\ln x$.
 - $\ln x < 0$ sur $]0 ; 1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1 ; +\infty[$: k décroît puis croît.
 - Minimum $k(1) = 0$. (Cohérent : un carré est toujours positif, et vaut 0 quand $\ln x = 0$.)
- c) $k(e) = 1^2 = 1$ et $k'(e) = \frac{2 \times 1}{e} = \frac{2}{e}$.
 - Tangente : $y = \frac{2}{e}(x - e) + 1 = \frac{2}{e}x - 2 + 1 = \frac{2}{e}x - 1$.

Réponse. a) $k'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ · b) minimum 0 en $x = 1$ · c) $y = \frac{2}{e}x - 1$.

Correction de l'exercice 10 - Dériver une distance

a) $d = \sqrt{u}$ avec $u = x^2 + 9$ et $u' = 2x$:

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

- $d'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.
- b) $d(4) = \sqrt{16+9} = 5$ (triangle 3-4-5) et $d'(4) = \frac{4}{5} = 0,8$.
 - **Interprétation** : quand M avance d'une petite longueur h à partir de $x = 4$, la distance AM augmente d'environ $0,8h$. Par exemple, $d(4,1) \approx 5 + 0,08 = 5,08$.
- c) $d'(x)$ a le signe de x : d décroît sur $] - \infty ; 0]$ puis croît. Minimum en $x = 0$, où $d(0) = 3$: M est alors en O , au pied de la perpendiculaire.

Réponse. a) $d'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ · b) $d(4) = 5$, $d'(4) = 0,8$ · c) en $x = 0$, distance 3.

Correction de l'exercice 11 - Dérivée seconde d'une cloche

a) Avec $u = -\frac{t^2}{2}$ et $u' = -t$:

- $f(t) = -te^{-t^2/2}$.
- f est un produit : $(uv)' = u'v + uv'$ avec $-t$ et $e^{-t^2/2}$.

$$f'(t) = -e^{-t^2/2} + (-t)(-t)e^{-t^2/2} = (t^2 - 1)e^{-t^2/2}$$

b) $f'(t)$ a le signe de $t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$: positif hors de $[-1 ; 1]$, négatif à l'intérieur.

— Donc f croît sur $] -\infty ; -1]$, décroît sur $[-1 ; 1]$, croît sur $[1 ; +\infty[$.

c) La pente f est **minimale** (la plus négative) en $t = 1$: c'est là que la courbe descend le plus vite.

— $f(1) = -e^{-1/2} \approx -0,607$.

— Par symétrie, elle **monte** le plus vite en $t = -1$, avec la pente $e^{-1/2} \approx 0,607$.

Réponse. a) $f(t) = -te^{-t^2/2}$; $f'(t) = (t^2 - 1)e^{-t^2/2}$ · c) en $t = 1$, pente $-e^{-1/2} \approx -0,607$.

Correction de l'exercice 12 - Une oscillation amortie

a) Produit de e^{-t} (dérivée $-e^{-t}$) et $\cos(2t)$ (dérivée $-2 \sin(2t)$) :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

— $y'(t) = -e^{-t} \cos(2t) - 2e^{-t} \sin(2t) = -e^{-t}(\cos(2t) + 2 \sin(2t))$.

b) On dérive à nouveau le produit de $-e^{-t}$ et $\cos(2t) + 2 \sin(2t)$:

— dérivée de $-e^{-t}$: e^{-t} ; dérivée de $\cos(2t) + 2 \sin(2t)$: $-2 \sin(2t) + 4 \cos(2t)$.

— $y''(t) = e^{-t}(\cos(2t) + 2 \sin(2t)) - e^{-t}(-2 \sin(2t) + 4 \cos(2t)) = e^{-t}(-3 \cos(2t) + 4 \sin(2t))$.

c) On met e^{-t} en facteur et on regroupe les cosinus et les sinus :

— cosinus : $-3 - 2 + 5 = 0$;

— sinus : $4 - 4 + 0 = 0$.

— Donc $y'' + 2y' + 5y = 0$ pour tout t . Cette équation décrit par exemple un circuit RLC : l'exponentielle traduit l'**amortissement**, le cosinus l'**oscillation**.

Réponse. a) $y' = -e^{-t}(\cos 2t + 2 \sin 2t)$ · b) $y'' = e^{-t}(-3 \cos 2t + 4 \sin 2t)$ · c) vérifié.

Correction de l'exercice 13 - Approximation affine d'une racine

a) $f(0) = 1$. Avec $u = 1 + x$ et $u' = 1$:

— $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, donc $f(0) = \frac{1}{2}$.

b) Près de 0, la courbe se confond avec sa tangente :

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{x}{2}$$

c) $\sqrt{1,02} = f(0,02) \approx 1 + 0,01 = 1,01$. Calculatrice : 1,009 95.

— $\sqrt{0,96} = f(-0,04) \approx 1 - 0,02 = 0,98$. Calculatrice : 0,979 80.

— Les erreurs sont de l'ordre de 10^{-4} : excellente précision tant que x reste petit.

— **Usage** : c'est ainsi qu'en physique on simplifie des formules comme $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ pour une petite perturbation ε .

Réponse. b) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ · c) $\approx 1,01$ et $\approx 0,98$.

Correction de l'exercice 14 - Pic de concentration d'un médicament

a) Avec $(e^{at})' = ae^{at}$:

$$C'(t) = 10(-0,2e^{-0,2t} + e^{-t})$$

b) $C'(t) = 0 \Rightarrow e^{-t} = 0,2e^{-0,2t}$.

— On divise par $e^{-0,2t} > 0$: $e^{-0,8t} = 0,2$.

- $-0,8t = \ln 0,2 = -\ln 5$, donc $t = \frac{\ln 5}{0,8} \approx 2,012$ h.
- $0,012 \times 60 \approx 0,7$ min : le pic survient vers **2 h 01 min**.
- Avant, $C' > 0$ (pour $t = 0 : C'(0) = 8$) ; après, $C' < 0$: c'est bien un maximum.
- c) Au pic, $e^{-t} = 0,2 e^{-0,2t}$, donc $C = 10 \times 0,8 e^{-0,2t} = 8 e^{-0,2t}$.
- $C_{\max} = 8 e^{-0,4024} \approx 5,35$ mg/L.

Réponse. a) $C'(t) = 10(-0,2 e^{-0,2t} + e^{-t})$ · b) $t = \frac{\ln 5}{0,8} \approx 2$ h 01 · c) $\approx 5,35$ mg/L.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : adaptation d'impédance

a) On écrit $P(R) = 144 R (R + 4)^{-2}$ et on dérive le produit, avec la règle de la chaîne pour $(R + 4)^{-2}$:

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

- $((R + 4)^{-2})' = -2(R + 4)^{-3}$.
- $P'(R) = 144(R + 4)^{-2} + 144R \times (-2(R + 4)^{-3})$.
- On met $144(R + 4)^{-3}$ en facteur : $P'(R) = 144(R + 4)^{-3}((R + 4) - 2R) = \frac{144(4 - R)}{(R + 4)^3}$.

b) Pour $R > 0$, $(R + 4)^3 > 0$: $P'(R)$ a le signe de $4 - R$.

— P croît sur $]0 ; 4]$ et décroît sur $[4 ; +\infty[$.

c) Maximum pour $R = 4 \Omega$, **égale à la résistance interne** :

- $P(4) = \frac{144 \times 4}{8^2} = \frac{576}{64} = 9$ W.
- C'est le principe d'**adaptation d'impédance** : $P_{\max} = \frac{E^2}{4r}$. On l'utilise pour les haut-parleurs et les antennes.

Réponse. a) $P'(R) = \frac{144(4 - R)}{(R + 4)^3}$ · b) croissante sur $]0 ; 4]$, décroissante ensuite · c) $R = 4 \Omega$, $P_{\max} = 9$ W.