

Plaquette 4 - Primitives de la forme $u'f(u)$ et intégrales

Composition de fonctions — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Primitives des composées et calcul intégral.

Fonction	Une primitive	Condition
$u' e^u$	e^u	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u > 0$
$u' u^n (n \neq -1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$	
$\sin(\omega t + \varphi)$	$-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$	

- **Ajuster un coefficient** : si l'expression vaut $k \times u'f(u)$, la primitive est multipliée par k . Par exemple, $x e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2}$.
- Les primitives d'une fonction diffèrent d'une **constante** ; une condition $F(a) = b$ la fixe.
- Intégrale : si F est une primitive de f ,

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$
- **Valeur moyenne** de f sur $[a; b]$: $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.
- Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, l'intégrale est l'**aire** sous la courbe, en unités d'aire.
- Contrôle systématique : on dérive la primitive trouvée.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître la forme

Dans chaque cas, on repère une fonction **et sa dérivée** dans l'expression.

- a) $u = 3x$, $u' = 3$: forme $u' e^u$, primitive e^{3x} .
- b) $u = x^2 + 5 > 0$, $u' = 2x$: forme $\frac{u'}{u}$, primitive $\ln(x^2 + 5)$.
- c) $u = \sin x$, $u' = \cos x$: forme $u' u^3$, primitive

$$\frac{u^4}{4} = \frac{\sin^4 x}{4}$$

d) $u = x + 1$, $u' = 1$: $\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{u'}{\sqrt{u}}$, primitive $2\sqrt{x+1}$.

e) $u = \cos x$, $u' = -\sin x$: forme $u' e^u$, primitive $e^{\cos x}$.

— Contrôle de c) : $\left(\frac{\sin^4 x}{4}\right)' = \frac{4 \cos x \sin^3 x}{4} = \cos x \sin^3 x$. Correct.

Réponse. a) e^{3x} · b) $\ln(x^2 + 5)$ · c) $\frac{\sin^4 x}{4}$ · d) $2\sqrt{x+1}$ · e) $e^{\cos x}$.

Correction de l'exercice 2 - Ajuster le coefficient

Il manque à chaque fois un facteur constant pour avoir exactement u' : on le fait apparaître, puis on compense.

$k u' f(u)$ a pour primitive $k F(u)$

a) $u = -4x$, $u' = -4$: $e^{-4x} = -\frac{1}{4} \times (-4) e^{-4x}$, primitive $-\frac{1}{4} e^{-4x}$.

b) $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$: $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 1}$, primitive $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$.

c) $x(x^2 + 1)^3 = \frac{1}{2} \times 2x(x^2 + 1)^3$, primitive $\frac{1}{2} \times \frac{(x^2 + 1)^4}{4} = \frac{(x^2 + 1)^4}{8}$.

d) $u = 3x + 2 > 0$, $u' = 3$: primitive $\frac{1}{3} \ln(3x + 2)$.

e) $u = 2x - 1$, $u' = 2$: primitive $\frac{1}{2} \times \frac{(2x - 1)^6}{6} = \frac{(2x - 1)^6}{12}$.

— **Attention** : on ne peut ajuster qu'un facteur **constant**. Pour e^{x^2} , il manquerait le facteur $2x$, qui n'est pas constant : aucune de ces formules ne s'applique.

Réponse. a) $-\frac{1}{4}e^{-4x}$ · b) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ · c) $\frac{(x^2 + 1)^4}{8}$ · d) $\frac{1}{3} \ln(3x + 2)$ · e) $\frac{(2x - 1)^6}{12}$.

Correction de l'exercice 3 - Primitives de signaux

Pour un signal sinusoïdal, l'étage intérieur est affine, $u = \omega t + \varphi$ et $u' = \omega$: on **divise par** ω .

$$\int \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \quad \int \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$$

a) $\omega = 100\pi$: primitive $\frac{\sin(100\pi t)}{100\pi}$.

b) $\omega = 2$: primitive $5 \times \left(-\frac{1}{2} \cos(2t)\right) = -\frac{5}{2} \cos(2t)$.

c) Primitive $-\frac{1}{\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$.

d) $\omega = \frac{1}{2}$ pour le premier terme, 3 pour le second :

— primitive $2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 3 \times \left(-\frac{1}{3} \cos(3t)\right) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(3t)$.

— **Piège** : diviser par $\omega = \frac{1}{2}$ revient à **multiplier par 2**.

Réponse. a) $\frac{\sin(100\pi t)}{100\pi}$ · b) $-\frac{5}{2} \cos(2t)$ · c) $-\frac{1}{\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ · d) $2 \sin \frac{t}{2} + \cos(3t)$.

Correction de l'exercice 4 - Fixer la constante

Toutes les primitives. Avec $u = x^2 - 1$ et $u' = 2x$, f est de la forme $u' e^u$:

$$F(x) = e^{x^2 - 1} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

La condition.

— $F(1) = e^0 + C = 1 + C$.

— $1 + C = 3$ donne $C = 2$.

— $F(x) = e^{x^2 - 1} + 2$.

Vérification.

- $F'(x) = 2xe^{x^2-1} = f(x)$ et $F(1) = 1 + 2 = 3$.
- **Piège** : ne pas écrire $C = 3$ en croyant que $F(1)$ « vaut C ». Ce n'est vrai que si $e^{u(1)} = 0$, ce qui n'arrive jamais.

Réponse. $F(x) = e^{x^2-1} + 2$.

Correction de l'exercice 5 - Des logarithmes cachés

Dans les deux cas, on prend $u = \ln x$, dont la dérivée $u' = \frac{1}{x}$ figure dans l'expression.

- a) $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x = u' u$: forme $u' u^n$ avec $n = 1$.

$$F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

- Contrôle : $F'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln x}{2} = \frac{\ln x}{x}$.

- b) $\frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{u'}{u}$, avec $u = \ln x > 0$ sur $]1; +\infty[$.

— $G(x) = \ln(\ln x)$.

- Contrôle : $G'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$.

— **Pourquoi** $]1; +\infty[$: il faut $\ln x > 0$ pour que $\ln(\ln x)$ existe.

Réponse. a) $\frac{(\ln x)^2}{2}$ · b) $\ln(\ln x)$.

Correction de l'exercice 6 - Vérifier trois primitives proposées

Une seule méthode fiable : **dériver** la primitive proposée et comparer.

- a) $F = \ln u$ avec $u = 1 + e^x > 0$: $F'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = f(x)$. **Vrai.**

- b) $G'(x) = \frac{4 \times 2x(x^2 + 1)^3}{8} = x(x^2 + 1)^3 = g(x)$. **Vrai.**

- c) H est un quotient : on applique la formule, avec $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- $H'(x) = \frac{2xe^{x^2} \times 2x - e^{x^2} \times 2}{4x^2} = e^{x^2} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$.

— Ce n'est pas e^{x^2} : **faux**. On ne peut pas « diviser par u' » quand u' n'est pas constante. (La fonction e^{x^2} n'a d'ailleurs aucune primitive exprimable avec les fonctions usuelles.)

Réponse. a) Vrai · b) Vrai · c) Faux.

Correction de l'exercice 7 - Une intégrale qui donne $\ln 2$

Avec $u = x^2 + 1$ et $u' = 2x$, on reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$, de primitive $\ln u$ ($u > 0$) :

$$I = [\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

- Valeur approchée : $I \approx 0,693$.

- **Contrôle de vraisemblance** : sur $[0; 1]$, la fonction varie de 0 à 1 ; une aire comprise entre 0 et 1, proche de la moitié, est cohérente.
- **Rédaction** : on écrit la primitive entre crochets avec les bornes, **puis** on calcule $F(1) - F(0)$, sans oublier le terme $F(0) = \ln 1 = 0$.

Réponse. $I = \ln 2 \approx 0,693$.

Correction de l'exercice 8 - Une intégrale trigonométrique

Avec $u = \sin x$ et $u' = \cos x$, la fonction est de la forme $u' e^u$:

$$J = [e^{\sin x}]_0^{\pi/2} = e^{\sin(\pi/2)} - e^{\sin 0} = e^1 - e^0 = e - 1$$

- Valeur approchée : $J \approx 1,718$.
- **Contrôle** : la fonction vaut 1 en 0 et 0 en $\frac{\pi}{2}$, avec un maximum intermédiaire ; sur un intervalle de longueur $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$, une aire de 1,72 est plausible.
- **Réflexe** : $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\sin 0 = 0$; les bornes de l'intégrale ne se reportent pas telles quelles dans l'exponentielle.

Réponse. $J = e - 1 \approx 1,718$.

Correction de l'exercice 9 - Une valeur moyenne

La valeur moyenne sur $[a; b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Primitive. $\frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2t}{t^2+1}$: forme $\frac{u'}{u}$ avec un coefficient $\frac{1}{2}$.

$$- F(t) = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1).$$

Intégrale et moyenne.

$$- \int_0^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \ln 10 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{\ln 10}{2}.$$

$$- \mu = \frac{1}{3} \times \frac{\ln 10}{2} = \frac{\ln 10}{6} \approx 0,384.$$

- **Contrôle** : f monte de 0 à son maximum 0,5 (atteint en $t = 1$), puis redescend à 0,3 ; une moyenne de 0,38 est cohérente.

Réponse. $\mu = \frac{\ln 10}{6} \approx 0,384$.

Correction de l'exercice 10 - Aire sous une courbe

f est positive sur $[0; 2]$: l'aire est l'intégrale de f sur cet intervalle.

Primitive. Avec $u = -x^2$ et $u' = -2x$:

$$- x e^{-x^2} = -\frac{1}{2} \times (-2x) e^{-x^2}, \text{ donc } F(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

Aire.

$$A = \int_0^2 x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^2 = -\frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2} = \frac{1 - e^{-4}}{2}$$

- $A \approx 0,491$ unité d'aire.
- **Contrôle sur le graphique** : la courbe monte jusqu'à environ 0,43 vers $x = 0,7$; le domaine couvre à peu près un rectangle de $2 \times 0,25$. L'ordre de grandeur 0,5 est le bon.

Réponse. $A = \frac{1 - e^{-4}}{2} \approx 0,491$ u.a.

Correction de l'exercice 11 - Charge transportée par un courant

a) Une primitive de $2e^{-50t}$ s'obtient en divisant par le coefficient de t :

$$\int e^{at} = \frac{1}{a} e^{at}$$

$$- I(t) = 2 \times \frac{e^{-50t}}{-50} = -0,04 e^{-50t}.$$

$$- q = I(0,1) - I(0) = -0,04 e^{-5} + 0,04 = 0,04(1 - e^{-5}).$$

$$- q \approx 0,0397 \text{ C}.$$

b) Pour une durée T quelconque : $q(T) = 0,04(1 - e^{-50T})$.

— Quand $T \rightarrow +\infty$, $e^{-50T} \rightarrow 0$, donc $q(T) \rightarrow 0,04 \text{ C}$.

— C'est la **charge initiale** du condensateur : en 0,1 s, il en a déjà perdu plus de 99 %.

Réponse. a) $q = 0,04(1 - e^{-5}) \approx 0,0397 \text{ C}$ · b) $0,04 \text{ C}$.

Correction de l'exercice 12 - Valeur efficace d'un courant alternatif

a) $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t)$. On primitive terme à terme, en divisant par 2ω pour le cosinus :

$$- \text{primitive : } \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}.$$

b) Valeur moyenne de $i^2 = I^2 \sin^2(\omega t)$ sur $[0; T]$:

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{I^2}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T$$

— $2\omega T = 4\pi$, donc $\sin(2\omega T) = 0$, et le crochet vaut $\frac{T}{2}$.

$$- I_{\text{eff}}^2 = \frac{I^2}{2}, \text{ donc } I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}.$$

c) L'amplitude vaut $U = 230\sqrt{2} \approx 325 \text{ V}$.

— C'est pour cette raison que les signaux du secteur s'écrivent $230\sqrt{2} \sin(100\pi t)$.

Réponse. a) $\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}$ · b) $I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ · c) $\approx 325 \text{ V}$.

Correction de l'exercice 13 - Distance parcourue au démarrage

a) $v(t) = 20 - 20e^{-0,5t}$. Une primitive de $e^{-0,5t}$ est $\frac{e^{-0,5t}}{-0,5} = -2e^{-0,5t}$:

$$- V(t) = 20t + 40e^{-0,5t}.$$

b) On calcule $V(10) - V(0)$:

$$d = [20t + 40e^{-0,5t}]_0^{10} = 200 + 40e^{-5} - 40$$

$$- d = 160 + 40e^{-5} \approx 160,3 \text{ m}.$$

c) À 20 m/s constants : 200 m. L'écart est d'environ 40 m.

— Le tramway perd ces 40 m pendant la phase d'accélération. Le calcul montre même que l'écart tend vers exactement 40 m : c'est le « retard » définitif pris au démarrage, égal à 20×2 , la vitesse finale fois la constante de temps.

Réponse. a) $V(t) = 20t + 40 e^{-0,5t}$ · b) $\approx 160,3$ m · c) environ 40 m de moins.

Correction de l'exercice 14 - Remplissage d'une cuve

a) Avec $u = -0,1t^2$, $u' = -0,2t$. On fait apparaître u' :

$$- 30 t e^{-0,1t^2} = -150 \times (-0,2t) e^{-0,1t^2}, \text{ car } -150 \times (-0,2) = 30.$$

$$D(t) = -150 e^{-0,1t^2}$$

$$\text{b) } V = D(5) - D(0) = -150 e^{-2,5} + 150 = 150(1 - e^{-2,5}) \approx 138 \text{ L.}$$

c) Sur $[0; T]$: $V(T) = 150(1 - e^{-0,1T^2})$, qui tend vers 150 L quand $T \rightarrow +\infty$.

— La pompe ne fournira jamais plus de 150 L ; au bout de 5 min, elle en a déjà délivré plus de 90 %.

— Contrôle : $D'(t) = -150 \times (-0,2t) e^{-0,1t^2} = 30 t e^{-0,1t^2}$. Correct.

Réponse. a) $D(t) = -150 e^{-0,1t^2}$ · b) ≈ 138 L · c) 150 L.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude et aire de $\ln x / x$

a) Quotient de $\ln x$ et de x :

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

— Le signe est celui de $1 - \ln x$, qui s'annule en $x = e$.

Intervalle	$[1; e]$	$[e; e^2]$
Signe de $f(x)$	+	−
Variations de f	croissante	décroissante

— Maximum $f(e) = \frac{1}{e} \approx 0,368$; $f(1) = 0$ et $f(e^2) = \frac{2}{e^2} \approx 0,271$.

$$\text{b) } \frac{\ln x}{x} = u' u \text{ avec } u = \ln x : F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}.$$

c) $f \geq 0$ sur l'intervalle, donc l'aire vaut :

$$— A = F(e^2) - F(1) = \frac{2^2}{2} - 0 = 2 \text{ unités d'aire.}$$

— Valeur moyenne : $\mu = \frac{2}{e^2 - 1} \approx 0,313$. Elle est bien comprise entre le minimum 0 et le maximum 0,368.

Réponse. a) maximum $\frac{1}{e}$ en e · b) $\frac{(\ln x)^2}{2}$ · c) aire 2 u.a. ; moyenne $\approx 0,313$.