

Plaquette 5 - Composées en situation :
modèles, études, optimisation
Composition de fonctions — Terminale STI2D
Exercices

Méthode

Les modèles de la physique, de la biologie et de l'électronique sont presque toujours des **composées** : une exponentielle d'un quotient, un logarithme d'un rapport, une racine d'une somme de carrés. On apprend ici à les lire (que fait chaque étage ?), à en étudier les variations, à calculer des seuils et des optimums, et à interpréter une dérivée comme une **sensibilité** : de combien la sortie change quand l'entrée bouge un peu.

Exercice 1 - Croissance logistique

Une population de bactéries est modélisée par $P(t) = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-0,5t}}$ (t en heures).

- Calculer $P(0)$ et la limite de P en $+\infty$.
- Sans dériver, montrer que P est croissante.
- Au bout de combien de temps la population atteint-elle 500 bactéries ? Arrondir au centième d'heure.

Exercice 2 - Niveau sonore en décibels

Le niveau sonore d'un son d'intensité I (en W/m^2) est $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ (en dB), avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

- Décrire les étages de cette composée et justifier que L est une fonction croissante de I .
- Calculer le niveau d'une conversation, d'intensité 10^{-6} W/m^2 .
- De combien de décibels le niveau augmente-t-il quand on **double** l'intensité ? Quand on la multiplie par 10 ?

Exercice 3 - Un filtre passe-bas

Le gain d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c est $G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c} \right)^2}}$ pour

$f \geq 0$.

- Sans dériver, montrer que G est décroissante sur $[0; +\infty[$.
- Calculer $G(f_c)$, puis le gain en décibels $20 \log G(f_c)$.
- À partir de quelle fréquence le gain devient-il inférieur à 0,1 ?

Exercice 4 - Oscillations amorties

La tension aux bornes d'un circuit RLC est $u(t) = 12 e^{-2t} \cos(10t)$ (u en V, t en s).

- Justifier que $-12 e^{-2t} \leq u(t) \leq 12 e^{-2t}$. Que représentent ces deux courbes ?
- Calculer $u(0)$ et l'amplitude maximale possible à $t = 0,5$ s.
- À partir de quel instant l'amplitude des oscillations est-elle inférieure à 1 % de sa valeur initiale ?

Exercice 5 - Une courbe en cloche

La répartition des tailles (en cm) dans une population est décrite par la courbe de $f(x) = e^{-(x-170)^2/50}$ (valeur relative, égale à 1 au sommet).

- Sans dériver, montrer que f est croissante sur $] -\infty ; 170]$ et décroissante ensuite.
- Calculer $f(175)$ et $f(165)$. Que remarque-t-on ?
- Déterminer les tailles pour lesquelles $f(x) = 0,5$ (au dixième). En déduire la « largeur à mi-hauteur » de la cloche.

Exercice 6 - Le temps de charge en fonction de la tension

Un condensateur se charge sous $E = 12$ V avec $RC = 0,01$ s : $u(t) = 12(1 - e^{-100t})$.

- Montrer que le temps nécessaire pour atteindre une tension U (avec $0 \leq U < 12$) est $t(U) = -0,01 \ln\left(1 - \frac{U}{12}\right)$.
- Calculer $t(6)$, $t(9)$ et $t(11,88)$ en millisecondes.
- Calculer $t'(U)$ et expliquer pourquoi les derniers volts sont si longs à gagner.

Exercice 7 - Température et vitesse de réaction

La vitesse d'une réaction chimique suit la loi d'Arrhenius $k(T) = A e^{-6000/T}$, où T est la température en kelvins et $A > 0$ une constante.

- Sans dériver, montrer que k est croissante sur $]0 ; +\infty[$.
- Calculer le rapport $\frac{k(310)}{k(300)}$ au centième. Commenter.
- Calculer $k'(T)$.

Exercice 8 - Taux de croissance relatif

Une ville compte $P(t) = 2\,000(1 + 0,05t)^2$ habitants, t en années.

- Calculer $\ln P(t)$ en le simplifiant, puis sa dérivée.
- Sachant que $\frac{P'}{P} = (\ln P)'$, donner le taux de croissance relatif de la population en $t = 0$ et en $t = 10$, en pourcentage par an.
- Ce modèle est-il exponentiel ? Justifier.

Exercice 9 - Approximations de petites variations

- a) Déterminer l'approximation affine de $\ln(1+x)$ et de e^x au voisinage de 0.
- b) En déduire des valeurs approchées de $\ln(1,03)$ et de $e^{0,02}$. Comparer aux valeurs exactes.
- c) Application : un prix augmente de 3%. Le « taux continu » équivalent est $\ln(1,03)$. Pourquoi est-il légitime, en première approche, de le prendre égal à 3% ?

Exercice 10 - Puissance au démarrage

Un tramway de masse $m = 1\,000$ kg (par voiture) démarre avec la vitesse $v(t) = 20(1 - e^{-0,5t})$ (m/s). Son énergie cinétique vaut $E(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2$ (en J).

- a) Montrer que $E'(t) = m v(t) v'(t)$.
- b) Calculer $E'(2)$, au watt près. Que représente cette grandeur ?

Exercice 11 - Le trajet le plus rapide

Un sauveteur, sur la plage au point S , veut rejoindre un nageur N situé à 3 hm du rivage. Le point H du rivage face au nageur est à 10 hm de S . Il court sur le sable à 5 hm/min jusqu'à un point M du rivage, avec $HM = x$, puis nage à 3 hm/min jusqu'à N .

- a) Montrer que la durée du trajet est $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{10-x}{5}$, pour $x \in [0; 10]$.
- b) Calculer $T(x)$ et résoudre $T'(x) = 0$.
- c) En déduire le point M optimal et la durée minimale. Comparer aux deux trajets extrêmes.



Le rivage est la droite (SH) ; le sauveteur court de S à M, puis nage de M à N.

Exercice 12 - Une tangente horizontale sans extremum

Soit $f(x) = x - \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$.
- b) En déduire le sens de variation de f .
- c) Que se passe-t-il en $x = 1$? Calculer $f(1)$ et $f(2)$.

Exercice 13 - La chaînette

Un câble suspendu entre deux poteaux prend la forme de la courbe $y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour $x \in [-1 ; 1]$ (en dizaines de mètres).

- Calculer $y'(x)$ et en déduire le point le plus bas du câble.
- Calculer la flèche du câble, c'est-à-dire la différence de hauteur entre les points d'attache et le point le plus bas (au centimètre près).
- Vérifier que $1 + y'(x)^2 = y(x)^2$. On admet que la longueur du câble est $\int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$: la calculer.

Exercice 14 - La période d'un pendule

La période d'un pendule simple de longueur L (en m) est $T(L) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (en s), avec $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

- Calculer $T(1)$ au millième.
- Calculer $T(L)$, puis $T(1)$.
- On allonge le fil de 1 cm. Estimer la variation de la période à l'aide de $T(1)$, puis la comparer au calcul exact.

Exercice 15 - Synthèse : la croissance d'une plante

La hauteur d'une plante (en cm) est modélisée par la fonction de Gompertz $g(t) = 100 e^{-2e^{-0,5t}}$, t en semaines.

- Décomposer g en étages. Calculer $g(0)$ (au dixième) et la limite de g en $+\infty$.
- Sans dériver, montrer que g est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- Calculer $g'(t)$.
- Au bout de combien de semaines la plante atteint-elle 90 cm ? Arrondir au dixième.