

Plaquette 2 - Composer et décomposer : images, domaines, variations

Composition de fonctions — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Une fonction composée s'évalue **de l'intérieur vers l'extérieur** : on calcule $u(x)$, puis on applique f au résultat. On apprend ici à composer dans le bon ordre, à décomposer une expression en « étages », à trouver l'ensemble de définition d'une composée, et à obtenir ses variations **sans dériver**, à partir de celles des fonctions qui la composent.

Exercice 1 - Composer à partir de tableaux

Deux fonctions u et f ne sont connues que par leurs tableaux de valeurs.

x	0	1	2	3
$u(x)$	2	3	0	1
$f(x)$	5	4	-1	0

- Calculer $(f \circ u)(x)$ pour $x = 0, 1, 2, 3$.
- Peut-on calculer $(u \circ f)(1)$? Et $(f \circ f)(3)$?

Exercice 2 - Dans un sens, puis dans l'autre

Soit $u(x) = x^2 + 1$ et $f(X) = \frac{1}{X}$.

- Exprimer $(f \circ u)(x)$ et $(u \circ f)(x)$, avec leur ensemble de définition.
- Calculer les deux en $x = 2$.

Exercice 3 - Décomposer en étages

Pour chaque fonction, décrire la suite des opérations effectuées sur x , dans l'ordre.

- $e^{\sqrt{x}+1}$
- $\ln(1 + e^x)$
- $(\ln x)^2$
- $\ln(x^2)$
- $\cos^2(3t)$, c'est-à-dire $(\cos(3t))^2$

Exercice 4 - $(\ln x)^2$ n'est pas $\ln(x^2)$

On pose $g(x) = (\ln x)^2$ et $h(x) = \ln(x^2)$.

- Donner l'ensemble de définition de chacune.
- Calculer g et h en $x = e$, en $x = e^2$ et en $x = -1$ (quand c'est possible).
- Résoudre $g(x) = h(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 5 - Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction.

a) $\sqrt{6-2x}$ · b) $\ln(3x-12)$ · c) $\ln(x^2+1)$ · d) $\frac{1}{e^x-1}$ · e) $\ln(5-x) + \sqrt{x}$

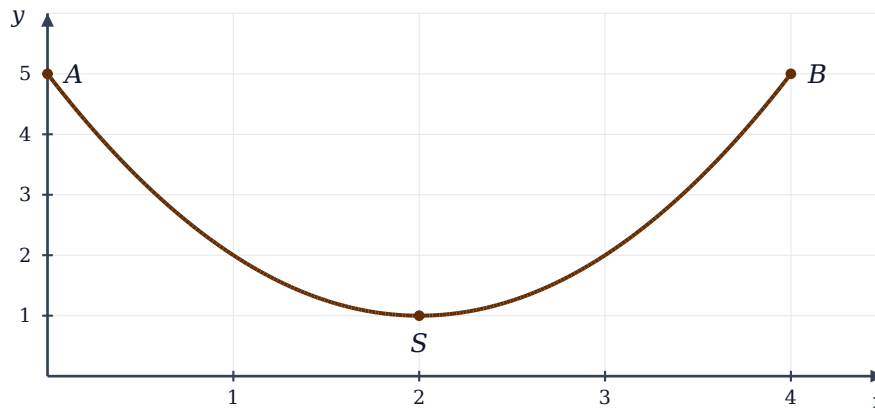
Exercice 6 - Un logarithme de quotient

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ à l'aide d'un tableau de signes.

Exercice 7 - Lire une composée sur un graphique

La courbe ci-dessous représente la fonction $u(x) = x^2 - 4x + 5$ sur $[0; 4]$.

- Lire $u(0)$, $u(2)$ et $u(4)$.
- En déduire $\ln(u(2))$, $\ln(u(0))$ (à 10^{-3} près) et $e^{u(2)}$.
- Justifier que $g(x) = \ln(u(x))$ est définie sur $[0; 4]$.
- Sans dériver, donner les variations de g et de $k(x) = \frac{1}{u(x)}$ sur $[0; 4]$, avec leurs extremums.



La courbe de u sur $[0; 4]$; S est son point le plus bas.

Exercice 8 - Des variations sans dériver

Sans calculer de dérivée, donner le sens de variation de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

- $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ sur $[-3; 0]$, puis sur $[0; 3]$.
- $h(x) = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.
- $k(x) = e^{1/x}$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 9 - Enchaîner des conversions

Pour convertir une température, on utilise $F = 1,8C + 32$ (des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit) et $C = K - 273,15$ (des kelvins aux degrés Celsius).

- Exprimer F directement en fonction de K . Quelle composée a-t-on calculée ?
- Convertir 300 K en degrés Fahrenheit.
- La température du corps humain est de 98,6 °F. Combien cela fait-il en kelvins ?

Exercice 10 - Exponentielle et logarithme s'annulent

Simplifier chaque expression (x désigne un réel strictement positif).

a) $e^{2\ln 3}$ · b) $\ln(e^{-4})$ · c) $e^{\ln x + \ln 2}$ · d) $\ln(\sqrt{e})$ · e) $e^{-\ln 5}$

Exercice 11 - Un signal sinusoïdal

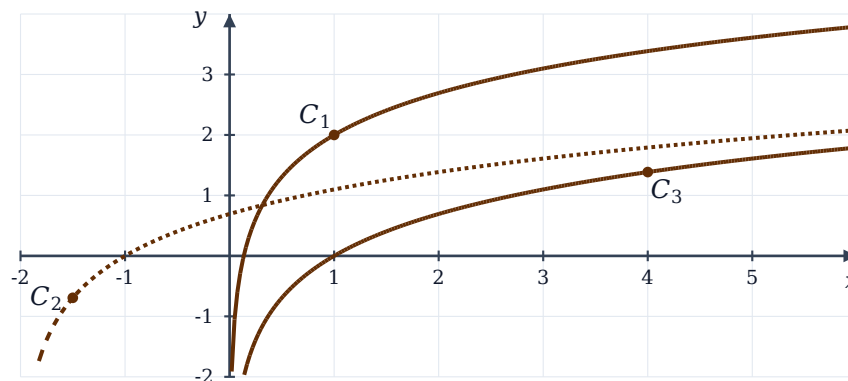
Un générateur délivre la tension $s(t) = 3 \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (s en V, t en s).

- Écrire s comme une composée $f \circ u$ en précisant u et f .
- Donner l'amplitude, la pulsation, la période et la fréquence du signal.
- Calculer $s(0)$ et $s(0,005)$.

Exercice 12 - Reconnaître trois courbes

Le graphique montre trois courbes C_1 , C_2 , C_3 , qui représentent, dans le désordre, $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(x+2)$ et $h(x) = \ln x + 2$.

- Pour chacune, donner l'ensemble de définition et l'image de 1.
- Associer chaque fonction à sa courbe, en justifiant.
- Laquelle de g et h est la composée de $\ln$ par une fonction affine appliquée **avant** ?



Les trois courbes C_1 , C_2 (pointillés) et C_3 .

Exercice 13 - Limites de composées

Déterminer les limites suivantes en $+\infty$.

a) $e^{-1/x}$ · b) $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ · c) $3 + e^{-0,5x}$ · d) $\ln(x^2 + 1)$ · e) $\frac{1}{1 + e^x}$

Exercice 14 - L'eau bout moins chaud en montagne

La pression atmosphérique à l'altitude h (en m) est modélisée par $p(h) = 1\,013 e^{-0,00012h}$ (en hPa). La température d'ébullition de l'eau sous la pression p est modélisée par $T(p) = 100 + 0,028(p - 1\,013)$ (en °C).

- Exprimer la température d'ébullition en fonction de l'altitude : $E(h) = T(p(h))$.
- Calculer la température d'ébullition au sommet du mont Blanc (4 800 m), au dixième.

- c) Sans dériver, justifier que E est décroissante.
- d) À quelle altitude l'eau bout-elle à 90 °C ? Arrondir à la dizaine de mètres.

Exercice 15 - Synthèse : une composée à trois étages

Soit $h(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

- a) Justifier que h est définie sur $\mathbb{R}$ et décomposer h en trois étages.
- b) Sans dériver, étudier le sens de variation de h .
- c) Déterminer la limite de h en $+\infty$ et en $-\infty$.
- d) Calculer $h(0)$, $h(2)$ et $h(-2)$ à 10^{-3} près.
- e) Montrer que $h(x) = -x + \ln(1 + e^x)$ pour tout réel x .