

Plaquette 1 - Composer, dériver et primitiver $u'f(u)$

Composition de fonctions — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

On calcule des images composées, on identifie les fonctions u et f d'une expression composée, on dérive avec la formule de la chaîne, puis on reconnaît les formes $u' e^u$, $\frac{u'}{u}$ et $u'u^n$ pour trouver des **primitives** — la compétence la plus utile du chapitre.

Exercice 1 - Calculer des images composées

Soit $u(x) = 2x + 1$ et $f(X) = X^2$.

- Calculer $(f \circ u)(3)$.
- Calculer $(u \circ f)(3)$.
- Les deux composées sont-elles égales ?

Exercice 2 - Identifier u et f

Pour chaque fonction, identifier u et f telles que l'expression soit $f(u(x))$.

- e^{3x-1}
- $\ln(x^2 + 1)$
- $\sqrt{5x+2}$
- $(4x-3)^5$

Exercice 3 - Dériver une exponentielle composée

Calculer la dérivée de :

- $f(x) = e^{5x}$
- $g(x) = e^{-0,2x}$
- $h(x) = e^{x^2}$

Exercice 4 - Dériver un logarithme composé

Calculer la dérivée de :

- $f(x) = \ln(3x+4)$ sur $\left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[$
- $g(x) = \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$
- $h(x) = \ln(e^x+1)$

Exercice 5 - Dériver une puissance et une racine

Calculer la dérivée de :

- $f(x) = (2x+3)^4$
- $g(x) = \sqrt{4x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$

Exercice 6 - Dériver une composée trigonométrique

Calculer la dérivée de $u(t) = 12 \cos(100\pi t)$, puis de $i(t) = 3 \sin(50t + 1)$.

Exercice 7 - Primitive de la forme $u'e^u$

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = 2x e^{x^2}$

b) $g(x) = e^{3x}$

c) $h(x) = x e^{x^2}$

Exercice 8 - Primitive de la forme u'/u

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

b) $g(x) = \frac{1}{2x + 5}$ sur $] -2,5 ; +\infty[$

c) $h(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$

Exercice 9 - Primitive de la forme $u'u^n$

Déterminer une primitive de :

a) $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$

b) $g(x) = (3x + 2)^4$

Exercice 10 - Primitive de la forme $u'/\sqrt{u}$

Soit $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Donner une primitive de f .

b) En déduire la valeur exacte de $\int_0^3 f(x) dx$.

Exercice 11 - Exponentielle et logarithme dans les deux sens

Soit $f(x) = \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$ et $u(x) = e^{2x} + 1$ sur $\mathbb{R}$.

a) Exprimer $(f \circ u)(x)$ et donner son ensemble de définition.

b) Exprimer $(u \circ f)(x)$ pour $x > 0$ et la simplifier.

c) Calculer les deux composées en $x = 1$ (à 10^{-3} près).

Exercice 12 - Intégrale d'une composée

Calculer $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ (valeur exacte puis arrondie au millièmes).

Exercice 13 - Variations d'une composée

Soit $f(x) = e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $f'(x)$.
- Étudier les variations de f et donner son maximum.

Exercice 14 - Problème : puissance instantanée

Une tension vaut $u(t) = 10 e^{-20t}$ (volts) et le courant $i(t) = 0,5 e^{-20t}$ (ampères).

- Exprimer la puissance instantanée $p(t) = u(t) \times i(t)$.
- Calculer $p(0)$ et $p(0,05)$ (arrondi au centième).
- Calculer l'énergie dissipée entre $t = 0$ et $t = 0,05$ s (arrondie au millième de joule).

Exercice 15 - Synthèse : étude complète

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ sur $\mathbb{R}$.

- Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
- Calculer $f(0)$ et $f(2)$ (arrondi au millième), puis donner le minimum de f .