

## Plaquette 3 - Dériver une composée : chaîne, tangentes, signaux

### Composition de fonctions — Terminale STI2D

#### Exercices

#### Méthode

La dérivée d'une composée se calcule **étage par étage** : on dérive la fonction extérieure, évaluée en  $u(x)$ , et on **multiplie par**  $u'(x)$ . Oublier ce facteur est l'erreur n° 1 du chapitre. On combine ici cette règle avec les dérivées de produits et de quotients, puis on s'en sert pour des tangentes, des variations, et des grandeurs physiques (vitesse, intensité) qui sont des dérivées de signaux.

#### Exercice 1 - Composées avec une fonction affine

Dériver chaque fonction.

a)  $(2x - 3)^4 \cdot b) e^{5-2x} \cdot c) \ln(4x + 1) \text{ sur } ]-\frac{1}{4}; +\infty[ \cdot d) \sqrt{3x + 6} \text{ sur } ]-2; +\infty[ \cdot e) \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$

#### Exercice 2 - Trouver l'erreur

Un élève a écrit les dérivées suivantes. Chacune est fausse : trouver l'erreur et corriger.

a)  $(e^{x^2})' = e^{x^2}$   
b)  $(\ln(x^2 + 1))' = \frac{1}{x^2 + 1}$   
c)  $((3x + 1)^5)' = 5(3x + 1)^4$   
d)  $(e^{-x})' = e^{-x}$

#### Exercice 3 - Un produit avec une composée

Soit  $f(x) = x e^{-2x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

- a) Calculer  $f'(x)$  et l'écrire sous forme factorisée.  
b) Étudier le signe de  $f'$  et en déduire le maximum de  $f$ .

#### Exercice 4 - Un quotient d'exponentielles

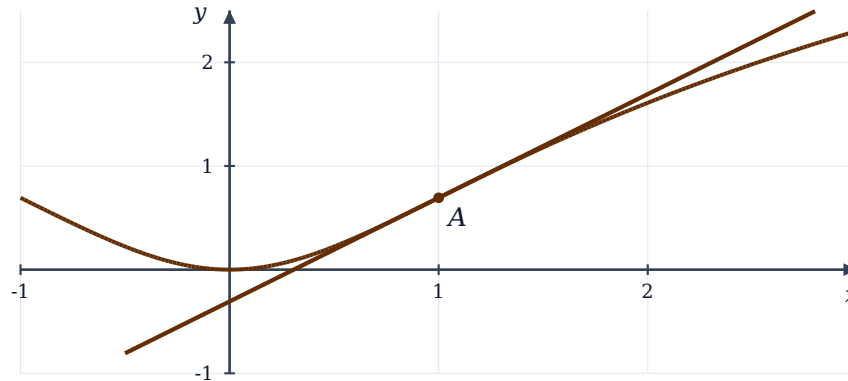
Soit  $g(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$  sur  $\mathbb{R}$ .

- a) Calculer  $g'(x)$ .  
b) En déduire le sens de variation de  $g$ .  
c) Calculer  $g(0)$  et la pente de la courbe en 0.

**Exercice 5 - Tangente à une courbe logarithmique**

Soit  $f(x) = \ln(1 + x^2)$ . Le graphique montre sa courbe et la tangente  $T$  au point  $A$  d'abscisse 1.

- Calculer  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
- Déterminer une équation de  $T$ .
- Vérifier sur le graphique que  $T$  coupe l'axe des abscisses près de 0,3.



*La courbe de  $f$  et sa tangente  $T$  en  $A$ .*

**Exercice 6 - Vitesse et accélération d'un ressort**

L'extrémité d'un ressort oscille selon  $x(t) = 0,05 \cos(20t)$  ( $x$  en m,  $t$  en s).

- Calculer la vitesse  $v(t) = x'(t)$  et l'accélération  $a(t) = v'(t)$ .
- Quelle est la vitesse maximale ? Où se trouve alors l'extrémité du ressort ?
- Montrer que  $a(t) = -400x(t)$ .

**Exercice 7 - Courant dans un condensateur**

Un condensateur de capacité  $C = 10 \mu\text{F}$  est branché sur le secteur :  $u(t) = 230\sqrt{2} \sin(100\pi t)$  (en V). L'intensité qui le traverse vaut  $i(t) = C u'(t)$ .

- Calculer  $u'(t)$ , puis  $i(t)$ .
- Donner l'amplitude de  $i$  (à  $10^{-2}$  A près).
- Comparer les instants où  $u$  et  $i$  sont maximales.

**Exercice 8 - Une exponentielle de polynôme**

Soit  $h(x) = e^{x^2 - 4x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Calculer  $h'(x)$ .
- Dresser le tableau de variations de  $h$  et donner son minimum, en valeur exacte et à  $10^{-4}$  près.

**Exercice 9 - Le carré d'un logarithme**

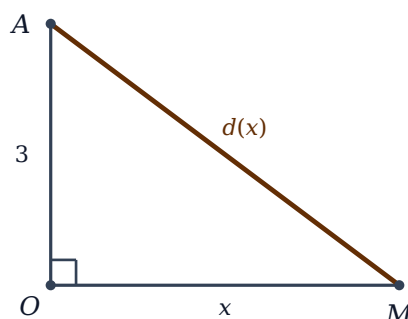
Soit  $k(x) = (\ln x)^2$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

- Calculer  $k'(x)$ .
- Étudier le signe de  $k'$  et donner le minimum de  $k$ .
- Déterminer l'équation de la tangente en  $x = e$ .

**Exercice 10 - Dériver une distance**

Un point  $M$  se déplace sur l'axe des abscisses,  $M(x ; 0)$ . Sa distance au point  $A(0 ; 3)$  est  $d(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ .

- Calculer  $d'(x)$ .
- Calculer  $d(4)$  et  $d'(4)$  ; interpréter  $d'(4)$ .
- Pour quelle position de  $M$  la distance est-elle minimale ?



*Le point  $M$  sur l'axe des abscisses et sa distance à  $A$ .*

**Exercice 11 - Dérivée seconde d'une cloche**

Soit  $f(t) = e^{-t^2/2}$ .

- Calculer  $f'(t)$ , puis  $f''(t)$  (la dérivée de  $f$ ).
- Étudier le signe de  $f''$  et en déduire les variations de  $f$ .
- En quels points la courbe de  $f$  descend-elle le plus vite ? Quelle est alors sa pente ?

**Exercice 12 - Une oscillation amortie**

On considère  $y(t) = e^{-t} \cos(2t)$ .

- Calculer  $y'(t)$ .
- Calculer  $y''(t)$ .
- Vérifier que  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

**Exercice 13 - Approximation affine d'une racine**

Soit  $f(x) = \sqrt{1+x}$  sur  $] -1 ; +\infty[$ .

- Calculer  $f(0)$  et  $f'(0)$ .
- En déduire l'approximation affine de  $f$  au voisinage de 0.

c) S'en servir pour donner une valeur approchée de  $\sqrt{1,02}$  et de  $\sqrt{0,96}$ . Comparer aux valeurs de la calculatrice.

#### Exercice 14 - Pic de concentration d'un médicament

Après une prise par voie orale, la concentration d'un médicament dans le sang est  $C(t) = 10(e^{-0,2t} - e^{-t})$  (en mg/L,  $t$  en heures).

- a) Calculer  $C'(t)$ .
- b) Résoudre  $C'(t) = 0$  et donner l'instant du pic à la minute près.
- c) Calculer la concentration maximale (à 0,01 près).

#### Exercice 15 - Synthèse : adaptation d'impédance

Une pile de force électromotrice  $E = 12$  V et de résistance interne  $r = 4 \Omega$  alimente une résistance  $R$  variable. La puissance reçue par  $R$  est

$$P(R) = \frac{E^2 R}{(R + r)^2} = \frac{144 R}{(R + 4)^2} \quad (R > 0)$$

- a) Calculer  $P'(R)$  et montrer que  $P'(R) = \frac{144(4 - R)}{(R + 4)^3}$ .
- b) Étudier les variations de  $P$ .
- c) Quelle résistance faut-il choisir pour recevoir la puissance maximale ? Que vaut-elle ?