

Plaquette 4 - Primitives de la forme $u'f(u)$ et intégrales

Composition de fonctions — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Trouver une primitive, c'est lire à l'envers une formule de dérivation. Pour une composée, on cherche dans l'expression une fonction u **et sa dérivée** u' : si elles y figurent, à un coefficient près, on reconnaît $u' e^u$, $\frac{u'}{u}$ ou $u' u^n$. On s'entraîne ici à reconnaître la forme, à ajuster le coefficient, à fixer la constante, puis à calculer des intégrales : aires, valeurs moyennes, charges et volumes.

Exercice 1 - Reconnaître la forme

Pour chaque fonction, identifier u , reconnaître la forme ($u' e^u$, $\frac{u'}{u}$, $u' u^n$ ou $\frac{u'}{\sqrt{u}}$) et donner une primitive.

- a) $3e^{3x}$ · b) $\frac{2x}{x^2+5}$ · c) $\cos x \sin^3 x$ · d) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ sur $] -1 ; +\infty[$ · e) $-\sin x e^{\cos x}$

Exercice 2 - Ajuster le coefficient

Donner une primitive de chaque fonction, sur un intervalle où elle est définie.

- a) e^{-4x} · b) $\frac{x}{x^2+1}$ · c) $x(x^2+1)^3$ · d) $\frac{1}{3x+2}$ sur $]-\frac{2}{3}; +\infty[$ · e) $(2x-1)^5$

Exercice 3 - Primitives de signaux

Donner une primitive de chaque fonction de la variable t .

- a) $\cos(100\pi t)$ · b) $5 \sin(2t)$ · c) $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$, où $\omega > 0$ est une constante · d) $\cos\left(\frac{t}{2}\right) - 3 \sin(3t)$

Exercice 4 - Fixer la constante

Déterminer la primitive F de $f(x) = 2xe^{x^2-1}$ qui vérifie $F(1) = 3$.

Exercice 5 - Des logarithmes cachés

Sur $]1 ; +\infty[$, donner une primitive de :

- a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ · b) $g(x) = \frac{1}{x \ln x}$

Exercice 6 - Vérifier trois primitives proposées

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

- a) $F(x) = \ln(1 + e^x)$ est une primitive de $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

- b) $G(x) = \frac{(x^2 + 1)^4}{8}$ est une primitive de $g(x) = x(x^2 + 1)^3$.
- c) $H(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$ est une primitive de $h(x) = e^{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 7 - Une intégrale qui donne $\ln 2$

Calculer $I = \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ en valeur exacte, puis à 10^{-3} près.

Exercice 8 - Une intégrale trigonométrique

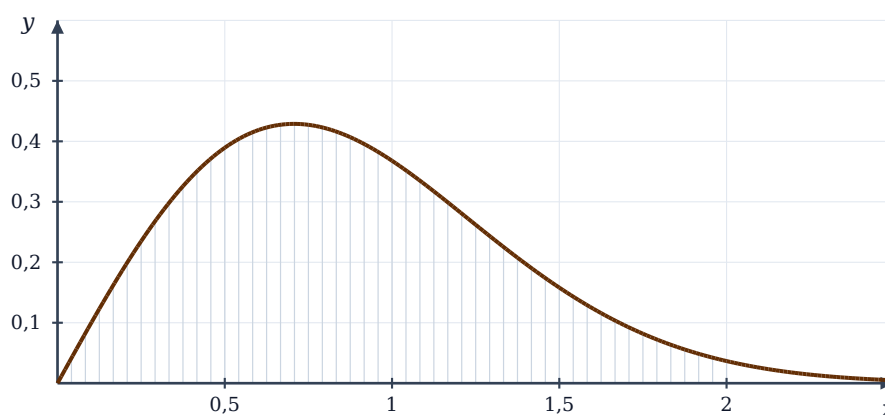
Calculer $J = \int_0^{\pi/2} \cos x e^{\sin x} dx$ en valeur exacte, puis à 10^{-3} près.

Exercice 9 - Une valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne de $f(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ sur $[0; 3]$, en valeur exacte puis à 10^{-3} près.

Exercice 10 - Aire sous une courbe

Le graphique représente $f(x) = x e^{-x^2}$ sur $[0; 2]$. Calculer l'aire du domaine hachuré, en valeur exacte puis à 10^{-3} près (en unités d'aire).



Le domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 11 - Charge transportée par un courant

Lors de la décharge d'un condensateur, l'intensité vaut $i(t) = 2 e^{-50t}$ (en A, t en s). La charge électrique qui traverse le circuit entre 0 et T est $q = \int_0^T i(t) dt$ (en coulombs).

- a) Calculer la charge écoulee pendant les 0,1 premières secondes, à 10^{-4} C près.
- b) Vers quelle valeur tend la charge écoulee quand T devient grand ?

Exercice 12 - Valeur efficace d'un courant alternatif

Un courant alternatif vaut $i(t) = I \sin(\omega t)$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Sa **valeur efficace** I_{eff} est définie par : I_{eff}^2 est la valeur moyenne de i^2 sur une période.

- En utilisant $\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$, donner une primitive de $\sin^2(\omega t)$.
- Calculer I_{eff}^2 , puis I_{eff} en fonction de I .
- Application : le secteur délivre une tension efficace de 230 V. Quelle est son amplitude ?

Exercice 13 - Distance parcourue au démarrage

Au démarrage, la vitesse d'un tramway est modélisée par $v(t) = 20(1 - e^{-0,5t})$ (en m/s, t en s). La distance parcourue entre 0 et T est $\int_0^T v(t) dt$.

- Donner une primitive de v .
- Calculer la distance parcourue pendant les 10 premières secondes, au dixième de mètre.
- Comparer avec la distance qu'il aurait parcourue à 20 m/s pendant 10 s, et interpréter l'écart.

Exercice 14 - Remplissage d'une cuve

Le débit d'une pompe, qui démarre puis s'essouffle, est $d(t) = 30 t e^{-0,1t^2}$ (en L/min, t en minutes). Le volume pompé entre 0 et T est $\int_0^T d(t) dt$.

- Donner une primitive de d .
- Calculer le volume pompé pendant les 5 premières minutes, au litre près.
- Quel volume la pompe peut-elle fournir au total ?

Exercice 15 - Synthèse : étude et aire de $\ln x / x$

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $[1; e^2]$.

- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
- Donner une primitive de f .
- Calculer l'aire sous la courbe de f sur $[1; e^2]$, puis la valeur moyenne de f sur cet intervalle (à 10^{-3} près).