

MATHÉMATIQUES

Composition de fonctions

Terminale STI2D

Fonction composée $v \circ u$ • Dérivée d'une composée • $(u^n)'$ • $(e^u)'$
 $(\ln u)'$ • $(\cos u)'$, $(\sin u)'$ • Primitives $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité physique-chimie et mathématiques, classe terminale STI2D** (programme de 2019), partie mathématiques, « Composition de fonctions ». Il couvre :

- définition de la composée $v \circ u$;
- dérivée $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$; cas de u^n (n entier relatif), $\cos u$, $\sin u$, e^u , $\ln u$;
- primitives de $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$, $f(ax + b)$.

Objectif : reconnaître une fonction composée, la dériver, et lire les formules de dérivation à l'envers pour obtenir des primitives.

Table des matières

1	Fonction composée	3
2	Dérivée d'une composée	3
3	Primitives	4
4	Erreurs classiques	4
5	Fiche de synthèse	4
6	Exercices d'application	5
7	Corrigés des exercices	5

1. Fonction composée

Composée

Soit u définie sur I et v définie sur un intervalle contenant les valeurs $u(x)$. La **composée** $v \circ u$ (« v rond u ») est la fonction $x \mapsto v(u(x))$: on applique u , puis v au résultat.

$u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^2$: $v \circ u(x) = (2x + 1)^2$, mais $u \circ v(x) = 2x^2 + 1$. L'ordre compte. e^{-x^2} est la composée de $x \mapsto -x^2$ suivie de $\exp$; $\ln(x^2 + 1)$ celle de $x \mapsto x^2 + 1$ suivie de $\ln$.

2. Dérivée d'une composée

Dérivée de $v \circ u$ (admis)

Si u est dérivable sur I et v dérivable sur un intervalle contenant les $u(x)$:

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u) \quad \text{c'est-à-dire} \quad (v(u(x)))' = u'(x) v'(u(x)).$$

Cas usuels

Fonction	Dérivée	Condition
u^n (n entier relatif)	$nu'u^{n-1}$	$u \neq 0$ si $n < 0$
e^u	$u'e^u$	
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$u > 0$
$\cos u$	$-u' \sin u$	
$\sin u$	$u' \cos u$	

$$— ((x^2 + 1)^5)' = 5 \times 2x \times (x^2 + 1)^4 = 10x(x^2 + 1)^4.$$

$$— (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}; \quad (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$— (\cos(3x^2))' = -6x \sin(3x^2).$$

$$— \left(\frac{1}{(2x + 3)^2} \right)' = ((2x + 3)^{-2})' = -2 \times 2(2x + 3)^{-3} = \frac{-4}{(2x + 3)^3}.$$

3. Primitives

Lire les dérivées à l'envers

Sur un intervalle où les expressions ont un sens :

Fonction	Une primitive
$u'u^n \ (n \neq -1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$u'e^u$	e^u
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$

Faire apparaître u'

On repère u , on calcule u' et l'on ajuste par une constante multiplicative. Exemple : $xe^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$, de primitive $\frac{1}{2}e^{x^2}$.

- $2x(x^2+1)^3$: primitive $\frac{(x^2+1)^4}{4}$.
- $\frac{2x}{x^2+1}$: primitive $\ln(x^2+1)$ (ici $x^2+1 > 0$).
- e^{3x} : primitive $\frac{1}{3}e^{3x}$.
- $\int_0^1 2xe^{x^2} dx = [e^{x^2}]_0^1 = e - 1$.

4. Erreurs classiques

À éviter

- Oublier le facteur u' : $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, pas e^{3x} .
- Inverser l'ordre de la composition.
- Primitiver $\frac{1}{x^2+1}$ en $\ln(x^2+1)$: il manque le $2x$ au numérateur.
- Oublier la condition $u > 0$ pour $\ln u$.

5. Fiche de synthèse

Composée	$v \circ u(x) = v(u(x))$
Dérivée	$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$
Cas usuels	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$; $(e^u)' = u'e^u$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $(\cos u)' = -u' \sin u$
Primitives	$u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln u $; $u'e^u \rightarrow e^u$

6. Exercices d'application

Exercice 1 – Dériver

Dériver $f(x) = (3x - 1)^4$, $g(x) = e^{\sin x}$ et $h(x) = \ln(1 + e^x)$.

Exercice 2 – Primitives

Déterminer une primitive de $p(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ et de $q(x) = (2x + 1)^3$.

Exercice 3 – Intégrale

Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$.

7. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $f'(x) = 12(3x - 1)^3$; $g'(x) = \cos x e^{\sin x}$; $h'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $p = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 4}$: primitive $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4)$. $q = \frac{1}{2} \times 2(2x + 1)^3$: primitive $\frac{(2x + 1)^4}{8}$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $[\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \ln 2 \approx 0,693$.