

Plaquette 4 - Méthode d'Euler : construire une solution pas à pas

Équations différentielles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthode d'Euler pour $y' = ay + b$, avec un pas h .

- Principe : **approximation affine** de la solution sur un petit intervalle,

$$y(t+h) \approx y(t) + h \times y'(t)$$

- On note $t_n = nh$ et y_n la valeur approchée de $y(t_n)$. Comme $y'(t_n) = ay_n + b$:

$$y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b) = (1+ah)y_n + hb$$

- Pour $y' = ay$ ($b = 0$), la suite est **géométrique** de raison $1+ah$: $y_n = y_0(1+ah)^n$.
- **Précision** : plus h est petit, meilleure est l'approximation, mais plus il faut de pas. Diviser h par 2 divise environ l'erreur par 2.
- **Stabilité** : si $a < 0$, il faut $1+ah > 0$, c'est-à-dire $h < -\frac{1}{a}$; sinon les valeurs changent de signe à chaque pas.
- La suite d'Euler a la **même valeur d'équilibre** $-\frac{b}{a}$ que la solution exacte.
- Écart relatif : $\frac{|\text{approché} - \text{exact}|}{|\text{exact}|}$.
- Boucle Python type :

```
y = y0
for k in range(n):
    y = y + h * (a * y + b)
```

Correction de l'exercice 1 - Un premier pas

a) L'équation donne la pente à partir de la valeur : $y'(0) = -y(0) = -1$.

b) On suit la tangente en 0 sur une longueur h , c'est l'**approximation affine** :

$$y(h) \approx y(0) + h \times y'(0)$$

- $y(0,1) \approx 1 + 0,1 \times (-1) = 0,9$.

c) Valeur exacte : $e^{-0,1} \approx 0,9048$.

- Erreur : $0,9048 - 0,9 \approx 0,0048$.

— L'approximation est **par défaut** : la courbe de e^{-t} est au-dessus de ses tangentes, et Euler avance justement sur la tangente.

Réponse. a) -1 · b) $0,9$ · c) erreur $\approx 0,0048$.

Correction de l'exercice 2 - Deux pas de suite

a) À chaque pas, on applique la relation d'Euler, avec la pente **recalculée** au point atteint :

$$y_{n+1} = y_n + h \times 2y_n$$

- $y_1 = 1 + 0,1 \times 2 \times 1 = 1,2$.

- $y_2 = 1,2 + 0,1 \times 2 \times 1,2 = 1,2 + 0,24 = 1,44$.

b) $y(0,2) = e^{2 \times 0,2} = e^{0,4} \approx 1,4918$.

— Écart : $1,4918 - 1,44 \approx 0,052$, soit environ 3,5 % de la valeur exacte.

— **Piège classique** : on évalue e^{2t} en $t = 0,2$, ce qui donne $e^{0,4}$ et non $e^{0,2}$.

— L'approximation est **par défaut** : la solution croît de plus en plus vite, et la tangente, suivie pendant h , prend du retard sur elle.

Réponse. a) $y_1 = 1,2$; $y_2 = 1,44$ · b) $y(0,2) \approx 1,4918$, écart $\approx 0,052$.

Correction de l'exercice 3 - Un tableau de valeurs

a) On part de la relation d'Euler :

$$y_{n+1} = y_n + h(a y_n + b)$$

— $y_{n+1} = y_n + 0,5(-0,5 y_n + 2) = y_n - 0,25 y_n + 1 = 0,75 y_n + 1$.

b) On calcule de proche en proche :

— $y_1 = 0,75 \times 0 + 1 = 1$;

— $y_2 = 0,75 \times 1 + 1 = 1,75$;

— $y_3 = 0,75 \times 1,75 + 1 = 2,3125$;

— $y_4 = 0,75 \times 2,3125 + 1 = 2,734375$.

c) $y(2) = 4(1 - e^{-1}) \approx 2,5285$.

— $y_4 \approx 2,734$ **dépasse** la valeur exacte d'environ 0,21 (environ 8 %) : le pas 0,5 est grossier.

— Ici la courbe est **concave** (elle ralentit en montant) : la tangente passe au-dessus d'elle, donc Euler surestime.

Réponse. b) 1 ; 1,75 ; 2,3125 ; 2,734375 · c) $y(2) \approx 2,5285$: Euler surestime d'environ 0,21.

Correction de l'exercice 4 - La relation de récurrence

a) Au point $(t_n; y_n)$, la pente donnée par l'équation est $a y_n + b$. On avance de h en suivant cette pente :

$$y_{n+1} = y_n + h(a y_n + b)$$

— On développe : $y_{n+1} = y_n + ah y_n + hb$.

— On factorise y_n : $y_{n+1} = (1 + ah) y_n + hb$.

b) Ici $a = -10$, $b = 50$, $h = 0,01$:

— $1 + ah = 1 - 0,1 = 0,9$ et $hb = 0,5$.

— $u_{n+1} = 0,9 u_n + 0,5$.

c) Si $b = 0$, $y_{n+1} = (1 + ah) y_n$: la suite est **géométrique** de raison $1 + ah$, donc $y_n = y_0 (1 + ah)^n$.

— Dans le cas général, c'est une suite **arithmético-géométrique** : le même type de suite qu'en enseignement commun, qui apparaît ici naturellement.

Réponse. b) $u_{n+1} = 0,9 u_n + 0,5$ · c) géométrique de raison $1 + ah$.

Correction de l'exercice 5 - Diviser le pas

a) Ici $a = 1$ et $b = 0$: la suite d'Euler est géométrique de raison $1 + h$.

$$y_n = y_0 (1 + h)^n = (1 + h)^n$$

— Il faut N pas de longueur $h = \frac{1}{N}$ pour atteindre $t = 1$, donc $y(1) \approx y_N = (1 + h)^N$.

b) Calculs à la calculatrice :

- $h = 1 : 2^1 = 2$;
- $h = 0,5 : 1,5^2 = 2,25$;
- $h = 0,25 : 1,25^4 \approx 2,441\,4$;
- $h = 0,1 : 1,1^{10} \approx 2,593\,7$.

c) Les valeurs se rapprochent de e quand h diminue, **toujours par défaut**.

- Avec $h = 0,1$, l'erreur est encore d'environ $0,12$: la méthode d'Euler converge **lentement**.
- **Culture** : $(1 + \frac{1}{N})^N$ tend vers e quand N devient grand ; c'est l'une des définitions historiques du nombre e , liée aux intérêts composés.

Réponse. b) $2 ; 2,25 ; 2,441\,4 ; 2,593\,7$ · c) convergence lente vers e , par défaut.

Correction de l'exercice 6 - Un pas trop grand

La relation d'Euler s'écrit ici :

$$y_{n+1} = (1 + ah)y_n = (1 - 3h)y_n$$

a) Avec $h = 1$, la raison vaut $1 - 3 = -2$:

- $y_1 = -2, y_2 = 4, y_3 = -8$.
- **Absurde** : la solution exacte e^{-3t} est positive et décroît vers 0 , alors que ces valeurs changent de signe et grandissent. Le pas est trop grand : en suivant la pente -3 pendant 1 seconde, on « saute » largement au-delà de 0 .

b) Avec $h = 0,1$, la raison vaut $0,7$:

- $y_1 = 0,7, y_2 = 0,49, y_3 = 0,343$. Positives et décroissantes : cohérent.

c) Il faut une raison positive : $1 - 3h > 0$, soit $h < \frac{1}{3}$.

- **Règle** : pour $a < 0$, on choisit h nettement plus petit que $-\frac{1}{a}$, c'est-à-dire que la **constante de temps** du phénomène.

Réponse. a) $-2 ; 4 ; -8$: absurde · b) $0,7 ; 0,49 ; 0,343$ · c) $h < \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 7 - Intérêts pas à pas

a) Avec $a = 0,05, b = 0$ et $h = 1$:

$$K_{n+1} = (1 + 0,05 \times 1)K_n = 1,05K_n$$

- Multiplier par $1,05$ chaque année, c'est exactement ajouter 5% d'intérêts une fois par an.

b) Suite géométrique : $K_{10} = 1,05^{10} \approx 1,628\,9$ (milliers d'euros).

- Exact : $K(10) = e^{0,05 \times 10} = e^{0,5} \approx 1,648\,7$.
- Écart : environ $0,019\,8$ millier d'euros, soit une vingtaine d'euros.
- **Interprétation** : la méthode d'Euler « capitalise » une fois par pas ; la solution exacte capitalise en continu. Réduire le pas revient à capitaliser plus souvent.

Réponse. b) Euler $\approx 1,628\,9$; exact $\approx 1,648\,7$.

Correction de l'exercice 8 - Lire un programme Python

a) La ligne 4 applique la relation d'Euler : elle remplace y par $y + h (ay + b)$, c'est-à-dire qu'elle avance d'un pas en suivant la pente donnée par l'équation $y' = ay + b$.

b) Avec $a = -2$, $b = 4$, $h = 0,25$:

$$y_{n+1} = y_n + 0,25 (-2 y_n + 4) = 0,5 y_n + 1$$

La boucle s'exécute 3 fois ($k = 0, 1, 2$) :

- $y = 0,5 \times 0 + 1 = 1$;
- $y = 0,5 \times 1 + 1 = 1,5$;
- $y = 0,5 \times 1,5 + 1 = 1,75$.
- La fonction renvoie 1,75.

c) Trois pas de 0,25 : $t = 3 \times 0,25 = 0,75$.

— Contrôle : la solution exacte est $y(t) = 2(1 - e^{-2t})$, et $y(0,75) = 2(1 - e^{-1,5}) \approx 1,5537$.
Le pas 0,25 reste grossier.

Réponse. b) 1,75 · c) approximation de $y(0,75) \approx 1,5537$.

Correction de l'exercice 9 - Un seuil en Python

a) Avec $a = -100$, $b = 500$, $h = 0,001$:

— $1 + ah = 1 - 0,1 = 0,9$ et $hb = 0,5$, d'où $u_{n+1} = 0,9 u_n + 0,5$.

b) On peut prévoir le résultat sans exécuter 22 tours à la main. La suite $v_n = u_n - 5$ est géométrique de raison 0,9, donc

$$u_n = 5(1 - 0,9^n)$$

- $u_n \geq 4,5$ équivaut à $0,9^n \leq 0,1$.
- $0,9^{21} \approx 0,109$ et $0,9^{22} \approx 0,098$: le premier rang est $n = 22$.
- Le programme affiche 22 0.022.

c) On résout $5(1 - e^{-100t}) = 4,5$, soit $e^{-100t} = 0,1$:

$$t = \frac{\ln 10}{100} \approx 0,0230 \text{ s}$$

— Euler donne 0,022 s, exact 0,023 s : écart d'une milliseconde, soit un pas. La précision est limitée par le pas lui-même.

Réponse. b) 22 0.022 · c) exact $\approx 0,023$ s.

Correction de l'exercice 10 - Le polygone d'Euler

a) La relation d'Euler est géométrique :

$$y_{n+1} = (1 + 0,5 \times 1) y_n = 1,5 y_n$$

— $y_1 = 1,5$; $y_2 = 2,25$; $y_3 = 3,375$; $y_4 = 5,0625$.

b) Chaque segment part de M_n avec la pente $0,5 y_n$: c'est la tangente à la solution qui **passe par** M_n .

- Les solutions de $y' = 0,5 y$ sont convexes (leur pente augmente) : une courbe convexe est **au-dessus** de ses tangentes.
- Chaque pas sous-estime donc, et l'erreur se reporte au pas suivant : M_n part de trop bas, puis descend encore sous la solution. L'écart **s'accumule**.

c) Exact : $e^2 \approx 7,389$. Écart : $7,389 - 5,063 \approx 2,33$, soit plus de 30 %. Avec un pas de 1 pour une constante de temps de 2, l'approximation est très grossière.

Réponse. a) 1,5 ; 2,25 ; 3,375 ; 5,0625 · c) écart $\approx 2,33$.

Correction de l'exercice 11 - Une tasse de thé

a) Relation d'Euler avec $h = 1$:

$$T_{n+1} = T_n + h \times T'(t_n) = T_n - 0,1(T_n - 20)$$

$$- T_{n+1} = T_n - 0,1T_n + 2 = 0,9T_n + 2.$$

b) De proche en proche :

$$- T_1 = 0,9 \times 90 + 2 = 83 \text{ °C ;}$$

$$- T_2 = 0,9 \times 83 + 2 = 76,7 \text{ °C ;}$$

$$- T_3 = 0,9 \times 76,7 + 2 = 71,03 \text{ °C.}$$

$$c) T(3) = 20 + 70e^{-0,3} \approx 71,86 \text{ °C.}$$

— Euler sous-estime d'environ 0,83 °C : il applique pendant toute la minute la vitesse de refroidissement du **début** de minute, qui est la plus forte.

— **Équilibre** : si $T_n = 20$, alors $T_{n+1} = 18 + 2 = 20$. La suite d'Euler se stabilise, comme la vraie température, à la température de la pièce.

Réponse. b) 83 ; 76,7 ; 71,03 · c) exact $\approx 71,86 \text{ °C}$.

Correction de l'exercice 12 - Mesurer la précision

$$a) \text{ Avec } h = 1 : y_{n+1} = y_n + (-0,2y_n + 1) = 0,8y_n + 1.$$

$$- y_1 = 1 ; y_2 = 1,8 ; y_3 = 2,44 ; y_4 = 2,952 ; y_5 = 3,3616.$$

b) Avec $h = 0,5$, il faut 10 pas pour atteindre $t = 5$:

$$- y_{10} = 5(1 - 0,9^{10}) \approx 5(1 - 0,3487) \approx 3,2566.$$

$$c) \text{ Valeur exacte : } y(5) = 5(1 - e^{-1}) \approx 3,1606.$$

$$\text{écart relatif} = \frac{|\text{approché} - \text{exact}|}{\text{exact}}$$

$$- h = 1 : \frac{3,3616 - 3,1606}{3,1606} \approx 6,4 \text{ \%}.$$

$$- h = 0,5 : \frac{3,2566 - 3,1606}{3,1606} \approx 3,0 \text{ \%}.$$

— **Constat** : diviser le pas par 2 divise l'erreur environ par 2. Pour gagner un chiffre exact, il faut donc environ **dix fois plus** de calculs.

Réponse. a) $y_5 = 3,3616$ · b) $\approx 3,2566$ · c) $\approx 6,4 \text{ \%}$ puis $\approx 3,0 \text{ \%}$.

Correction de l'exercice 13 - Quand aucune formule n'existe

a) Ici la pente ne dépend que de t , pas de F :

$$F_{n+1} = F_n + h \times e^{-t_n^2}$$

b) Deux pas de 0,5 :

$$- F_1 = 0 + 0,5 \times e^0 = 0,5 ;$$

$$- F_2 = 0,5 + 0,5 \times e^{-0,25} \approx 0,5 + 0,3894 = 0,8894.$$

c) $0,8894 > 0,7468$: l'approximation est **par excès**.

- La pente e^{-t^2} **diminue** sur $[0; 1]$. Euler utilise à chaque pas la pente du début de l'intervalle, donc la plus grande : il surestime.
- **Lien avec l'intégrale** : $F(1) = \int_0^1 e^{-t^2} dt$, et la méthode d'Euler revient ici à la **méthode des rectangles à gauche**.

Réponse. b) $F(1) \approx 0,8894$ · c) par excès, car la pente décroît.

Correction de l'exercice 14 - Retrouver l'équation

a) On identifie avec la forme générale :

$$y_{n+1} = (1 + ah)y_n + hb$$

- $1 + 0,1a = 0,98$, donc $0,1a = -0,02$ et $a = -0,2$.
- $0,1b = 0,3$, donc $b = 3$.
- L'équation est $y' = -0,2y + 3$.

b) **Pour la solution exacte** : la solution constante est $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{-0,2} = 15$.

- **Pour la suite** : on cherche ℓ tel que $\ell = 0,98\ell + 0,3$, d'où $0,02\ell = 0,3$ et $\ell = 15$.
- La même valeur : la méthode d'Euler conserve l'**équilibre** de l'équation, quel que soit le pas (tant qu'il reste stable).

Réponse. a) $y' = -0,2y + 3$ · b) 15.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une perfusion

a) $C_{n+1} = C_n + 0,5(-0,25C_n + 2) = 0,875C_n + 1$.

— $C_1 = 1$; $C_2 = 1,875$; $C_3 \approx 2,641$; $C_4 \approx 3,311$.

b) On exprime v_{n+1} en fonction de v_n :

- $v_{n+1} = C_{n+1} - 8 = 0,875C_n + 1 - 8 = 0,875C_n - 7 = 0,875(C_n - 8) = 0,875v_n$.
- (v_n) est géométrique de raison 0,875 et de premier terme $v_0 = -8$:

$$C_n = 8 - 8 \times 0,875^n = 8(1 - 0,875^n)$$

c) Solution constante : $-\frac{2}{-0,25} = 8$. Donc $C(t) = Ke^{-0,25t} + 8$, et $C(0) = 0$ donne $K = -8$:

$$C(t) = 8(1 - e^{-0,25t})$$

— $C(2) = 8(1 - e^{-0,5}) \approx 3,148$ mg/L, contre $C_4 \approx 3,311$: Euler surestime d'environ 0,16 mg/L.

d) $0,875^n \rightarrow 0$ et $e^{-0,25t} \rightarrow 0$: les deux tendent vers 8 mg/L.

— **Bilan** : la suite d'Euler et la solution ont la même structure, $8(1 - 0,875^n)$ contre $8(1 - e^{-0,25t})$. Euler remplace $e^{-0,125} \approx 0,8825$ par 0,875 à chaque pas.

Réponse. a) 1 ; 1,875 ; 2,641 ; 3,311 · b) $C_n = 8(1 - 0,875^n)$ · c) $C(2) \approx 3,148$ · d) 8 mg/L.