

Plaquette 5 - Modéliser avec $y' = ay + b$: de l'énoncé à la décision

Équations différentielles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Modéliser, résoudre, décider.

- **Traduire** : « entre b par unité de temps » donne $+b$; « sort une proportion k de la quantité » donne $-ky$; « croît de $r\%$ de sa valeur » donne $+\frac{r}{100}y$.
- **Forme « écart à l'équilibre »** : $y' = -k(y - y_e)$ s'écrit aussi $y' = -ky + ky_e$.
- Solutions ($a \neq 0$) :

$$y(t) = C e^{at} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

- Avec la condition $y(0) = y_0$:

$$y(t) = y_e + (y_0 - y_e) e^{at} \quad \text{où } y_e = -\frac{b}{a}$$

- $a < 0$: y tend vers y_e (équilibre **stable**), avec la constante de temps $\tau = -\frac{1}{a}$.
- $a > 0$: y s'éloigne de y_e (équilibre **instable**), vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $y_0 - y_e$.
- **Atteindre un seuil s** : on isole l'exponentielle, puis on applique $\ln$:

$$e^{at} = \frac{s - y_e}{y_0 - y_e} \Leftrightarrow t = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{s - y_e}{y_0 - y_e} \right)$$

- Contrôle final : l'unité, l'ordre de grandeur, et le sens (croissance ou décroissance) annoncé par l'énoncé.

Correction de l'exercice 1 - Du texte à l'équation

On écrit la vitesse de variation comme la somme d'un apport fixe et d'une part proportionnelle à la grandeur.

a) Entrées : $+30$; sorties : $-0,05 V$.

- $V' = -0,05 V + 30$, donc $a = -0,05$, $b = 30$.
- Équilibre : $-\frac{30}{-0,05} = 600 \text{ m}^3$ (quand 5% de V vaut 30).

b) « Proportionnelle à $50 - y$ avec le coefficient $0,4$ » :

$$y' = 0,4(50 - y) = -0,4y + 20$$

- $a = -0,4$, $b = 20$, équilibre 50 .

c) Les intérêts ajoutent $0,03 S$, les versements $1\,200$:

- $S' = 0,03 S + 1\,200$, donc $a = 0,03$ et $b = 1\,200$.
- Équilibre : $-\frac{1\,200}{0,03} = -40\,000 \text{ €}$. Il est négatif et **instable** ($a > 0$) : il n'a pas de sens concret, le compte partant de 0 ne s'en approche jamais.

Réponse. a) $V' = -0,05 V + 30$, équilibre 600 m^3 · b) $y' = -0,4 y + 20$, équilibre 50 · c) $S' = 0,03 S + 1\,200$, équilibre $-40\,000$ (instable).

Correction de l'exercice 2 - Donner un sens aux coefficients

- a) Le terme 30 est le **débit d'arrivée**, en m^3/h : il ne dépend pas du volume.
 — Le coefficient 0,05 est la **proportion** du volume perdue par heure, en h : le produit $0,05 V$ est bien en m^3/h , comme V .
 b) Le bassin se stabilise quand $V' = 0$:

$$0 = -0,05 V + 30 \Leftrightarrow V = \frac{30}{0,05} = 600 \text{ m}^3$$

- Comme $a = -0,05 < 0$, cet équilibre est stable : le volume s'en approche quel que soit le volume de départ.

c) $\tau = -\frac{1}{a} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ h}$.

- On considère en pratique le régime atteint au bout de $5\tau = 100 \text{ h}$ (écart restant inférieur à 1 % de l'écart initial), soit un peu plus de 4 jours.

Réponse. a) débit d'arrivée (m^3/h), proportion perdue par heure (h) · b) 600 m^3 · c) $\tau = 20 \text{ h}$, régime vers 100 h.

Correction de l'exercice 3 - Le bassin : combien de temps ?

- a) Solutions de $V' = -0,05 V + 30$: équilibre 600, donc

$$V(t) = C e^{-0,05t} + 600$$

- $V(0) = C + 600 = 200$ donne $C = -400$: $V(t) = 600 - 400 e^{-0,05t}$.
 — Vérification : $V'(t) = 20 e^{-0,05t}$ et $-0,05 V + 30 = -30 + 20 e^{-0,05t} + 30$. Correct.

- b) On résout $V(t) = 500$:

- $400 e^{-0,05t} = 100$, soit $e^{-0,05t} = 0,25$.
 — $-0,05 t = \ln 0,25 = -\ln 4$, donc $t = 20 \ln 4 \approx 27,726 \text{ h}$.
 — $0,726 \times 60 \approx 44 \text{ min}$: le bassin atteint 500 m^3 au bout d'environ **27 h 44 min**.
 — Contrôle : on a comblé les trois quarts de l'écart ($400 \rightarrow 100$), ce qui prend $2\tau \ln 2 \approx 1,39 \tau$. Cohérent.

Réponse. a) $V(t) = 600 - 400 e^{-0,05t}$ · b) $t = 20 \ln 4 \approx 27 \text{ h } 44 \text{ min}$.

Correction de l'exercice 4 - Établissement du courant dans une bobine

- a) On divise par $L = 0,5$:

$$i' = -\frac{R}{L} i + \frac{E}{L} = -20 i + 24$$

- b) Équilibre : $-\frac{24}{-20} = 1,2 \text{ A}$ (c'est la loi d'Ohm $\frac{E}{R}$, la bobine ne jouant plus aucun rôle en régime continu).

- $i(t) = C e^{-20t} + 1,2$ et $i(0) = 0$ donne $C = -1,2$:

$$i(t) = 1,2(1 - e^{-20t})$$

- $\tau = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ s} = \frac{L}{R}$.

- c) 95 % de 1,2 revient à $1 - e^{-20t} = 0,95$:

- $e^{-20t} = 0,05$, donc $t = \frac{\ln 20}{20} \approx 0,150 \text{ s}$.

- Soit environ 3τ : c'est la règle pratique « 95 % à 3τ ».

Réponse. a) $i' = -20i + 24$ · b) $i(t) = 1,2(1 - e^{-20t})$, 1,2 A, $\tau = 0,05$ s · c) ≈ 150 ms.

Correction de l'exercice 5 - Démarrage d'un moteur

a) Régime établi : $\omega' = 0$, donc $\omega = \frac{300}{2} = 150$ rad/s.

— Un tour vaut 2π rad : $\frac{150}{2\pi} \approx 23,87$ tr/s, soit environ 1 432 tr/min.

b) $\omega(t) = Ce^{-2t} + 150$ et $\omega(0) = 0$ donne $C = -150$:

$$\omega(t) = 150(1 - e^{-2t})$$

c) On résout $150(1 - e^{-2t}) = 140$:

$$— e^{-2t} = 1 - \frac{140}{150} = \frac{1}{15}.$$

$$— -2t = -\ln 15, \text{ donc } t = \frac{\ln 15}{2} \approx 1,35 \text{ s.}$$

— **Contrôle** : $\tau = 0,5$ s, et 140 rad/s représente 93 % du régime, atteint vers $2,7\tau$. Cohérent avec la règle des 95 % à 3τ .

Réponse. a) 150 rad/s $\approx 1\,432$ tr/min · b) $\omega(t) = 150(1 - e^{-2t})$ · c) $\approx 1,35$ s.

Correction de l'exercice 6 - La montée en température d'un four

a) On développe : $\theta' = -0,02\theta + 0,4 + 4 = -0,02\theta + 4,4$.

— Équilibre : $-\frac{4,4}{-0,02} = 220$ °C. Le four ne dépassera jamais 220 °C : à cette température, les pertes $0,02(220 - 20) = 4$ °C/min compensent exactement le chauffage.

b) Avec la condition initiale :

$$\theta(t) = 220 + (20 - 220)e^{-0,02t} = 220 - 200e^{-0,02t}$$

c) On résout $\theta(t) = 180$:

$$— 200e^{-0,02t} = 40, \text{ donc } e^{-0,02t} = 0,2.$$

$$— t = \frac{\ln 5}{0,02} \approx 80,5 \text{ min.}$$

— Il faut attendre environ **1 h 21 min**. Le modèle explique pourquoi les fours réels ont un thermostat : sans lui, on ne réglerait pas la température, on attendrait seulement plus ou moins longtemps.

Réponse. a) $\theta' = -0,02\theta + 4,4$, maximum 220 °C · b) $\theta(t) = 220 - 200e^{-0,02t}$ · c) ≈ 81 min.

Correction de l'exercice 7 - Confronter le modèle aux mesures

a) On évalue le modèle :

$$\theta(t) = 220 - 200e^{-0,02t}$$

$$— \theta(10) = 220 - 200e^{-0,2} \approx 56,3 ;$$

$$— \theta(20) = 220 - 200e^{-0,4} \approx 85,9 ;$$

$$— \theta(30) = 220 - 200e^{-0,6} \approx 110,2 ;$$

$$— \theta(45) = 220 - 200e^{-0,9} \approx 138,7 ;$$

$$— \theta(60) = 220 - 200e^{-1,2} \approx 159,8.$$

b) Écarts mesure – modèle : +0,7 ; -0,9 ; +0,8 ; -1,7 ; +1,2.

- Le plus grand écart vaut $1,7\text{ }^{\circ}\text{C}$, à $t = 45\text{ min}$.
- Tous les écarts sont inférieurs à la précision de $2\text{ }^{\circ}\text{C}$, et ils changent de signe : ils ne montrent **pas de tendance**. Le modèle est **satisfaisant** sur cette page.
- **À retenir** : un modèle se valide sur des mesures qu'on n'a pas utilisées pour le construire, et sur la plage étudiée seulement (rien ne dit ici ce qui se passe au-delà de 60 min).

Réponse. a) $56,3 ; 85,9 ; 110,2 ; 138,7 ; 159,8$ · b) écart maximal $1,7\text{ }^{\circ}\text{C}$: modèle satisfaisant.

Correction de l'exercice 8 - Une pêche trop intensive

a) Équilibre : $-\frac{-300}{0,1} = 3\,000$. Avec $P(0) = 2\,500$:

$$P(t) = 3\,000 + (2\,500 - 3\,000)e^{0,1t} = 3\,000 - 500e^{0,1t}$$

— Vérification : $P'(t) = -50e^{0,1t}$ et $0,1P - 300 = 300 - 50e^{0,1t} - 300$. Correct.

b) Ici $a = 0,1 > 0$: l'équilibre est **instable**, et on part en dessous. Le terme $-500e^{0,1t}$ grandit, la population diminue de plus en plus vite.

— $P(t) = 0 \Leftrightarrow e^{0,1t} = 6 \Leftrightarrow t = 10 \ln 6 \approx 17,9\text{ ans}$.

c) On note q le prélèvement annuel, et le modèle devient $P' = 0,1P - q$. La population ne baisse pas au départ si $P'(0) \geq 0$: $0,1 \times 2\,500 - q \geq 0$, soit $q \leq 250$.

— Avec $q = 250$, on a exactement $P' = 0$: $2\,500$ devient l'équilibre, la population reste stable.

— **Leçon** : avec $a > 0$, un petit excès de prélèvement ne donne pas un petit déclin, mais une **disparition** en temps fini.

Réponse. a) $P(t) = 3\,000 - 500e^{0,1t}$ · b) extinction vers $17,9\text{ ans}$ · c) 250 poissons par an au plus.

Correction de l'exercice 9 - Épargner en continu

a) Équilibre : $-\frac{1,2}{0,03} = -40$. Avec $S(0) = 0$:

$$S(t) = -40 + (0 + 40)e^{0,03t} = 40(e^{0,03t} - 1)$$

— Vérification : $S'(t) = 1,2e^{0,03t}$ et $0,03S + 1,2 = 1,2e^{0,03t} - 1,2 + 1,2$. Correct.

b) $S(10) = 40(e^{0,3} - 1) \approx 13,994$ milliers d'euros, soit environ $13\,994\text{ €}$.

— Versements cumulés : $10 \times 1\,200 = 12\,000\text{ €}$.

— Intérêts : $13\,994 - 12\,000 = 1\,994\text{ €}$.

— **Remarque** : ici $a > 0$ et le capital croît sans limite ; l'« équilibre » -40 n'est qu'un intermédiaire de calcul, sans signification concrète.

Réponse. a) $S(t) = 40(e^{0,03t} - 1)$ · b) $\approx 13\,994\text{ €}$, dont $1\,994\text{ €}$ d'intérêts.

Correction de l'exercice 10 - Un lac pollué

a) Chaque jour, la rivière emporte $40\,000\text{ m}^3$ sur $2\,000\,000$, soit une proportion $\frac{40\,000}{2\,000\,000} = 0,02$ de l'eau du lac, et donc (si le polluant est bien mélangé) 2% du polluant : $-0,02Q$.

b) Équilibre : $-\frac{20}{0,02} = 1\,000\text{ kg}$.

— Concentration : $\frac{1\,000\,000\text{ g}}{2\,000\,000\text{ m}^3} = 0,5\text{ g/m}^3$.

c) Sans rejet, l'équation devient $Q' = -0,02 Q$, avec $Q(0) = 1\,000$:

$$Q(t) = 1\,000 e^{-0,02t}$$

— Moitié : $e^{-0,02t} = 0,5$, soit $t = \frac{\ln 2}{0,02} \approx 34,7$ jours.

— 90 % éliminés : $e^{-0,02t} = 0,1$, soit $t = \frac{\ln 10}{0,02} \approx 115,1$ jours.

— **Constat** : près de quatre mois pour éliminer 90 % d'un polluant rejeté seulement 20 kg par jour. La décroissance exponentielle est lente à la fin, parce que la sortie est proportionnelle à ce qui reste.

Réponse. b) 1 000 kg, soit $0,5\text{ g/m}^3 \cdot c) \approx 34,7$ jours ; $\approx 115,1$ jours.

Correction de l'exercice 11 - Un composant qui chauffe

a) Équilibre : $\theta' = 0$ donne $0,5(\theta - 25) = 15$, soit $\theta = 55\text{ °C}$.

— Partant de 25 °C avec $a = -0,5 < 0$, la température croît vers 55 °C **sans jamais la dépasser**. Elle reste sous 70 °C : aucun risque.

b) Nouvel équilibre : $0,5(\theta - 25) = 30$, soit $\theta = 85\text{ °C}$. Avec $\theta(0) = 25$:

$$\theta(t) = 85 + (25 - 85)e^{-0,5t} = 85 - 60e^{-0,5t}$$

— $\theta(t) = 70 \Leftrightarrow 60e^{-0,5t} = 15 \Leftrightarrow e^{-0,5t} = 0,25$.

— $t = 2 \ln 4 \approx 2,77$ min.

— **Décision** : en doublant la puissance, le composant dépasse sa limite en moins de 3 minutes. Il faut un dissipateur (qui augmenterait le coefficient 0,5 et abaisserait l'équilibre).

Réponse. a) équilibre $55\text{ °C} < 70\text{ °C}$ · b) $\theta(t) = 85 - 60e^{-0,5t}$; 70 °C atteints vers $2,77$ min.

Correction de l'exercice 12 - Identifier un modèle à partir de mesures

a) La tension se stabilise à 10 : c'est l'équilibre $-\frac{b}{a} = 10$, avec $a < 0$. Donc $u(t) = Ce^{at} + 10$, et $u(0) = 0$ donne $C = -10$:

$$u(t) = 10(1 - e^{at})$$

b) On utilise la mesure en $t = 2$:

— $10(1 - e^{2a}) = 8$, soit $e^{2a} = 0,2$.

— $2a = \ln 0,2 = -\ln 5$, donc $a = -\frac{\ln 5}{2} \approx -0,805$.

— $b = -10a = 5 \ln 5 \approx 8,047$.

c) $u(1) = 10(1 - e^a)$ avec $e^a = e^{-\frac{\ln 5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

— $u(1) = 10\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 5,53\text{ V}$.

— **Contrôle** : $e^{2a} = (e^a)^2 = \frac{1}{5}$, cohérent avec b). Une troisième mesure en $t = 1$ permettrait de **valider** le modèle.

Réponse. b) $a = -\frac{\ln 5}{2} \approx -0,805$; $b = 5 \ln 5 \approx 8,047$ · c) $u(1) \approx 5,53\text{ V}$.

Correction de l'exercice 13 - Deux radiateurs à comparer

a) Équilibres :

$$- A : -\frac{6}{-0,1} = 60 \text{ °C} ; B : -\frac{3,5}{-0,05} = 70 \text{ °C}.$$

— B chauffe **plus haut**, mais sa constante de temps est double (20 min contre 10 min).

b) Avec $\theta(0) = 10$, la formule $\theta(t) = \theta_e + (10 - \theta_e)e^{at}$ donne :

$$\theta_A(t) = 60 - 50e^{-0,1t} \quad \theta_B(t) = 70 - 60e^{-0,05t}$$

$$- A : 50e^{-0,1t} = 10, \text{ donc } t = 10 \ln 5 \approx 16,1 \text{ min.}$$

$$- B : 60e^{-0,05t} = 20, \text{ donc } t = 20 \ln 3 \approx 22,0 \text{ min.}$$

— **Conclusion** : A atteint 50 °C le premier, alors que B chauffe plus fort à terme. Pour atteindre vite un seuil **inférieur** aux deux équilibres, la constante de temps compte autant que la température finale.

Réponse. a) A : 60 °C ; B : 70 °C · b) A, en $\approx 16,1$ min (B : $\approx 22,0$ min).

Correction de l'exercice 14 - Le temps de réponse d'un thermomètre

a) C'est une équation « écart à l'équilibre » d'équilibre 80 et de coefficient $a = -\frac{1}{8}$. Avec $T(0) = 20$:

$$T(t) = 80 + (20 - 80)e^{-t/8} = 80 - 60e^{-t/8}$$

$$b) T(10) = 80 - 60e^{-1,25} \approx 62,8 \text{ °C}.$$

— Au bout de 10 s, le thermomètre sous-estime encore la température de plus de 17 °C.

c) La lecture est juste à 1 °C près quand $80 - T(t) \leq 1$:

$$- 60e^{-t/8} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-t/8} \leq \frac{1}{60} \Leftrightarrow t \geq 8 \ln 60.$$

$$- 8 \ln 60 \approx 32,8 \text{ s.}$$

— **Conseil pratique** : il faut attendre environ 4 constantes de temps ($\tau = 8$ s). Lire un thermomètre trop tôt est l'erreur de mesure la plus courante en TP.

Réponse. a) $T(t) = 80 - 60e^{-t/8}$ · b) $\approx 62,8$ °C · c) au bout d'environ 32,8 s.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le chauffe-eau et son thermostat

$$a) \theta' = -0,01\theta + 0,15 + 0,5 = -0,01\theta + 0,65.$$

$$- \text{Équilibre : } \frac{0,65}{0,01} = 65 \text{ °C}.$$

b) Avec $\theta(0) = 15$:

$$\theta(t) = 65 + (15 - 65)e^{-0,01t} = 65 - 50e^{-0,01t}$$

$$- \theta(t) = 55 \Leftrightarrow e^{-0,01t} = 0,2 \Leftrightarrow t = 100 \ln 5 \approx 160,9 \text{ min.}$$

— Soit environ **2 h 41 min**.

c) Nouvelle équation, d'équilibre 15 °C, avec la valeur de départ 60 °C (on remet le chronomètre à zéro) :

$$\theta(t) = 15 + 45e^{-0,01t}$$

$$- \theta(t) = 50 \Leftrightarrow 45e^{-0,01t} = 35 \Leftrightarrow e^{-0,01t} = \frac{7}{9}.$$

$$- t = 100 \ln\left(\frac{9}{7}\right) \approx 25,1 \text{ min.}$$

— **Bilan** : sans puisage, le chauffe-eau se coupe environ 25 minutes, puis se relance pour remonter de 50 à 60 °C. C'est ce cycle que le thermostat répète toute la journée.

Réponse. a) $\theta' = -0,01\theta + 0,65$, équilibre 65 °C · b) ≈ 2 h 41 min · c) $\approx 25,1$ min.