

Plaquette 3 - Notion de solution : vérifier, lire, combiner

Équations différentielles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Ce qu'est une solution et comment le vérifier.

- Une fonction f dérivable est **solution** de $y' = ay + b$ sur $\mathbb{R}$ lorsque, pour tout réel t :

$$f'(t) = af(t) + b$$

- **Vérifier** : on calcule $f'(t)$ d'un côté, $af(t) + b$ de l'autre, et on constate que les deux expressions sont identiques pour tout t . Une égalité vraie pour une seule valeur de t ne suffit pas.
- **Notations** : y' , $y'(t)$, $\frac{dy}{dt}$ désignent la même dérivée. En physique, $\frac{du}{dt}$ est la dérivée de la tension u par rapport au temps.
- **Mise sous forme standard** : on isole y' , puis on lit a (le coefficient de y) et b (le terme constant).
- **Pente sans résoudre** : si la courbe d'une solution passe par $(t_0; y_0)$, la tangente en ce point a pour coefficient directeur

$$y'(t_0) = ay_0 + b$$

- **Combinaisons** : si f et g sont solutions de $y' = ay$, alors $f + g$ et kf le sont aussi. Si f et g sont solutions de $y' = ay + b$, alors $f - g$ est solution de $y' = ay$.
- Solutions de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) : $y(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Dérivées utiles : $(e^{at})' = ae^{at}$; $(\cos(\omega t))' = -\omega \sin(\omega t)$; $(\sin(\omega t))' = \omega \cos(\omega t)$.

Correction de l'exercice 1 - Une équation sans y

a) Une fonction est solution si elle vérifie l'égalité $f'(t) = 2t$ **pour tout** réel t .

- $f'(t) = 2t + 0 = 2t$.
- L'égalité est vraie pour tout t : f est solution.

b) Chercher les fonctions dont la dérivée est $2t$, c'est chercher les **primitives** de $t \mapsto 2t$:

$$y(t) = t^2 + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

- La constante disparaît quand on dérive : t^2 , $t^2 + 5$, $t^2 - 1$ sont toutes solutions.
- **À retenir** : une équation différentielle a en général une **infinité** de solutions, qui ne diffèrent que par une constante. C'est déjà le cas ici, dans l'équation la plus simple possible.

Réponse. a) Oui · b) $y(t) = t^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2 - Vérifier par le calcul

L'équation est écrite sous la forme $y' + 2y = 8$: on calcule le membre de gauche avec f et on doit obtenir 8 pour tout t .

- Dérivée : $f'(t) = -3 \times (-2)e^{-2t} = 6e^{-2t}$.
- Double de f : $2f(t) = 8 - 6e^{-2t}$.

— Somme :

$$f(t) + 2f(t) = 6e^{-2t} + 8 - 6e^{-2t} = 8$$

L'égalité est vraie pour tout réel t : f est bien solution.

— **Méthode** : on ne met pas l'équation sous une autre forme pour vérifier ; on calcule **exactement** ce que l'énoncé écrit. Les termes en exponentielle doivent s'annuler : s'ils ne s'annulent pas, la fonction n'est pas solution.

Réponse. $f(t) + 2f(t) = 8$ pour tout t : f est solution.

Correction de l'exercice 3 - Trouver le bon exposant

On remplace y par f dans l'équation, en utilisant la dérivée $(e^{kt})' = k e^{kt}$.

— $f(t) = 5k e^{kt}$.

— $2f(t) + f(t) = 10k e^{kt} + 5 e^{kt} = 5 e^{kt} (2k + 1)$.

On veut que cette expression soit nulle **pour tout** t . Or une exponentielle n'est jamais nulle : $5 e^{kt} > 0$. Il faut donc

$$2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -0,5$$

— **Contrôle** : sous forme standard, $2y' + y = 0$ s'écrit $y' = -0,5y$, dont les solutions sont $C e^{-0,5t}$. On retrouve bien $k = -0,5$, et la valeur 5 de la constante n'intervient pas.

Réponse. $k = -0,5$.

Correction de l'exercice 4 - Une solution affine

a) Pour une fonction affine, la dérivée est le coefficient directeur :

— $f(t) = m$.

— $2f(t) - 4t = 2mt + 2p - 4t = (2m - 4)t + 2p$.

b) On veut $m = (2m - 4)t + 2p$ **pour tout** t . Un polynôme de degré 1 n'est égal à une constante que si son coefficient de t est nul ; on identifie donc les coefficients :

$$\begin{cases} 2m - 4 = 0 \\ 2p = m \end{cases}$$

— La première équation donne $m = 2$.

— La seconde donne $p = 1$.

Vérification avec $f(t) = 2t + 1$:

— $f(t) = 2$;

— $2f(t) - 4t = 4t + 2 - 4t = 2$. Les deux coïncident.

— **Remarque** : l'équation n'est pas de la forme $y' = ay + b$ (le second membre dépend de t). La **définition** d'une solution s'applique quand même : c'est elle qu'on utilise pour vérifier.

Réponse. $m = 2, p = 1$: $f(t) = 2t + 1$.

Correction de l'exercice 5 - Des notations de physique

Dans chaque cas, $\frac{du}{dt}$ est la dérivée u' : on isole cette dérivée, puis on lit le coefficient de la fonction et le terme constant.

a) $u' = -50u + 250$.

— Donc $a = -50$ et $b = 250$.

b) On remplace : $0,1 u' + u = 12$.

— $0,1 u' = -u + 12$.

— On divise par 0,1 : $u' = -10u + 120$.

— Donc $a = -10$ et $b = 120$. On retrouve $a = -\frac{1}{RC}$ et $b = \frac{E}{RC}$.

c) On développe le second membre :

$$\theta' = -0,2\theta + 0,2 \times 19 = -0,2\theta + 3,8$$

— Donc $a = -0,2$ et $b = 3,8$.

— **Piège** : dans c), b n'est pas 19. La température ambiante 19°C est la valeur d'équilibre $-\frac{b}{a} = \frac{3,8}{0,2} = 19$, pas le terme constant.

Réponse. a) $a = -50$, $b = 250$ · b) $a = -10$, $b = 120$ · c) $a = -0,2$, $b = 3,8$.

Correction de l'exercice 6 - Une pente sans résoudre

a) Puisque f est solution, l'égalité $f'(t) = -0,5f(t) + 3$ est vraie pour **tout** t , en particulier pour $t = 2$:

$$f'(2) = -0,5 \times f(2) + 3$$

— Le point A donne $f(2) = 4$.

— $f'(2) = -0,5 \times 4 + 3 = -2 + 3 = 1$.

b) Équation de la tangente en $t = 2$:

$$y = f'(2)(t - 2) + f(2)$$

— $y = 1 \times (t - 2) + 4 = t + 2$.

— **Ce qu'il faut retenir** : l'équation différentielle donne la **pente** en chaque point dès qu'on connaît la **valeur**. C'est ce principe qu'utilise la méthode d'Euler pour construire une solution pas à pas.

Réponse. a) $f'(2) = 1$ · b) $y = t + 2$.

Correction de l'exercice 7 - Monter ou descendre ?

a) Une solution constante a une dérivée nulle : $0 = -2y + 6$, d'où $y = 3$.

b) On factorise le second membre :

$$y' = -2y + 6 = -2(y - 3)$$

— Si $y(0) = 1$: $y'(0) = -2 \times (1 - 3) = 4 > 0$, la solution commence par **croître**.

— Si $y(0) = 5$: $y'(0) = -2 \times (5 - 3) = -4 < 0$, elle commence par **décroître**.

— Dans les deux cas, la solution se dirige **vers** 3.

c) Les solutions sont $y(t) = C e^{-2t} + 3$, avec $C = y(0) - 3$.

— $y'(t) = -2C e^{-2t}$: son signe est celui de $-C$, et il est le même pour tout t .

— $y(0) = 1$ donne $C = -2$, donc $y' > 0$: croissante sur $\mathbb{R}$, de limite 3.

— $y(0) = 5$ donne $C = 2$, donc $y' < 0$: décroissante sur $\mathbb{R}$, de limite 3.

— **Conclusion** : une solution ne franchit jamais la valeur d'équilibre 3, elle s'en approche.

Réponse. a) $y = 3$ · b) $y'(0) = 4 > 0$ et $y'(0) = -4 < 0$ · c) $C = -2$ (croissante) et $C = 2$ (décroissante), limite 3.

Correction de l'exercice 8 - Somme de solutions

a) Par hypothèse, $f' = af$ et $g' = ag$.

— Dérivée d'une somme :

$$(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$$

— Donc $f + g$ est solution de $y' = ay$.

— De même, $(3f)' = 3f' = 3af = a(3f)$: $3f$ est solution.

b) $f(t) + g(t) = 4 - 2e^{-t}$.

— Sa dérivée : $(f + g)'(t) = 2e^{-t}$.

— Le second membre : $-(f + g)(t) + 2 = -4 + 2e^{-t} + 2 = -2 + 2e^{-t}$.

— Les deux diffèrent de 2 : $f + g$ **n'est pas** solution.

— **Pourquoi** : en ajoutant les deux égalités, on obtient $(f + g)' = -(f + g) + 4$, avec un b doublé. La propriété de la somme n'est vraie que lorsque $b = 0$.

Réponse. a) Oui pour les deux · b) Non : $f + g$ vérifie $y' = -y + 4$.

Correction de l'exercice 9 - D'où vient la formule du cours

a) $g'(t) = 0$ et $-3g(t) + 6 = -6 + 6 = 0$: l'égalité est vérifiée, g est solution.

b) On a $f' = -3f + 6$ et $g' = -3g + 6$. On soustrait :

$$h' = f' - g' = (-3f + 6) - (-3g + 6) = -3(f - g) = -3h$$

— La constante 6 disparaît dans la différence : h est solution de $y' = -3y$.

c) D'après le cours, $h(t) = Ce^{-3t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $f = h + g$:

$$f(t) = Ce^{-3t} + 2 \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

— On retrouve la formule $Ce^{at} - \frac{b}{a}$, puisque $-\frac{6}{-3} = 2$.

— **Le schéma à retenir** : toutes les solutions = une solution particulière (ici constante) + toutes les solutions de l'équation sans second membre.

Réponse. c) $f(t) = Ce^{-3t} + 2$, $C \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 10 - Retrouver l'équation sur une courbe

La pente de la tangente. T passe par $A(0; 2)$ et $B(2; 5)$:

$$f'(0) = \frac{5-2}{2-0} = 1,5$$

Deux équations.

— Valeur d'équilibre : la limite 5 est la solution constante $-\frac{b}{a}$, donc $b = -5a$.

— En $t = 0$: $f(0) = af(0) + b$, soit $1,5 = 2a + b$.

— On remplace : $1,5 = 2a - 5a = -3a$, d'où $a = -0,5$ et $b = 2,5$.

Expression de f . Les solutions de $y' = -0,5y + 2,5$ sont

$$f(t) = Ce^{-0,5t} + 5$$

— $f(0) = C + 5 = 2$ donne $C = -3$: $f(t) = 5 - 3e^{-0,5t}$.

— **Contrôle** : $f(t) = 1,5e^{-0,5t}$, donc $f(0) = 1,5$, conforme au graphique. Et $a < 0$ est cohérent avec une courbe qui se stabilise.

Réponse. $a = -0,5$, $b = 2,5$; $f(t) = 5 - 3e^{-0,5t}$.

Correction de l'exercice 11 - Associer équations et solutions

Toutes les fonctions valent 1 en 0 : la condition initiale ne permet pas de les distinguer. On compare donc les **pentés** en 0, données par chaque équation avec $y(0) = 1$:

$$y'(0) = a \times y(0) + b = a + b$$

— (A) : $y'(0) = 2$. (B) : $y'(0) = -2$. (C) : $y'(0) = -2 + 4 = 2$. (D) : $y'(0) = 2 - 2 = 0$.

Dérivées des fonctions en 0 :

— $f_1'(t) = 2e^{-2t}$, donc $f_1'(0) = 2$; $f_2'(0) = -2$; $f_3'(0) = 0$; $f_4'(0) = 2$.

— (B) va avec f_2 et (D) avec f_3 : pour (D), la valeur d'équilibre est $-\frac{-2}{2} = 1$, et partir de l'équilibre, c'est y rester.

— Restent (A) et (C), de même pente en 0. On regarde la limite : (C) a pour équilibre 2 et $a < 0$, c'est f_1 , qui tend vers 2 ; (A) va avec $f_4 = e^{2t}$.

— **Contrôle de (C)** : $f_1'(t) = 2e^{-2t}$ et $-2f_1(t) + 4 = -4 + 2e^{-2t} + 4$. Égalité vérifiée.

Réponse. (A)- f_4 · (B)- f_2 · (C)- f_1 · (D)- f_3 .

Correction de l'exercice 12 - Un oscillateur électrique

On dérive **deux fois**, puis on remplace dans l'équation.

a) Avec la formule $(\cos(\omega t))' = -\omega \sin(\omega t)$:

— $u'(t) = -300 \sin(100t)$;

— $u''(t) = -300 \times 100 \cos(100t) = -30\,000 \cos(100t)$;

— $u''(t) + 10\,000 u(t) = -30\,000 \cos(100t) + 30\,000 \cos(100t) = 0$. u est solution.

b) De la même manière :

— $v'(t) = 100 \cos\left(50t + \frac{\pi}{3}\right)$;

— $v''(t) = -5\,000 \sin\left(50t + \frac{\pi}{3}\right)$.

— Donc $v'' + 10\,000 v = 15\,000 \sin\left(50t + \frac{\pi}{3}\right)$, qui n'est pas nul pour tout t : v **n'est pas** solution.

— Elle serait solution de $v'' + 2\,500 v = 0$, car $50^2 = 2\,500$:

$$(A \sin(\omega t + \varphi))'' = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$$

— **À retenir** : la pulsation d'une solution est imposée par l'équation, $\omega = \sqrt{10\,000} = 100$ rad/s ; l'amplitude et la phase, elles, sont libres.

Réponse. a) Oui · b) Non (elle vérifie $v'' + 2\,500 v = 0$).

Correction de l'exercice 13 - Corriger deux copies

Une réponse est juste si elle vérifie **les deux** conditions : l'équation pour tout t , et la condition initiale.

Copie de Léa.

— $y(0) = 30 - 20 = 10$. Condition initiale vérifiée.

— $y'(t) = 3e^{0,1t}$ et $0,1 y(t) + 2 = 3e^{0,1t} - 2 + 2 = 3e^{0,1t}$. Équation vérifiée.

Copie de Tom.

— $y(0) = 10 + 20 = 30 \neq 10$: la condition initiale est fausse.

- (L'équation, elle, n'est même pas vérifiée : $y' = e^{0,1t}$ tandis que $0,1y + 2 = e^{0,1t} + 4$.)
Tom a pris $+20$ au lieu de $-\frac{b}{a} = -20$.

Méthode du cours. La solution constante est $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{0,1} = -20$:

$$y(t) = C e^{0,1t} - 20$$

- $y(0) = C - 20 = 10$ donne $C = 30$. C'est la réponse de Léa.

Réponse. Léa a raison : $y(t) = 30 e^{0,1t} - 20$.

Correction de l'exercice 14 - La vitesse d'un parachutiste

- a) On divise par $m = 80$:

$$v' = g - \frac{k}{m} v = -0,2 v + 9,8$$

- Donc $a = -\frac{16}{80} = -0,2$ et $b = 9,8$.

- b) **Condition initiale** : $v(0) = 49(1 - 1) = 0$.

- **Équation** : $v'(t) = 49 \times 0,2 e^{-0,2t} = 9,8 e^{-0,2t}$.

- $-0,2 v(t) + 9,8 = -9,8 + 9,8 e^{-0,2t} + 9,8 = 9,8 e^{-0,2t}$. Les deux coïncident.

- c) $v(10) = 49(1 - e^{-2}) \approx 49 \times 0,86466 \approx 42,37$ m/s.

- Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{-0,2t} \rightarrow 0$, donc $v(t) \rightarrow 49$ m/s (environ 176 km/h).

- **Sens physique** : la vitesse limite est atteinte quand le frottement kv compense le poids mg , soit $v = \frac{mg}{k} = \frac{784}{16} = 49$. C'est la valeur d'équilibre $-\frac{b}{a}$.

Réponse. a) $v' = -0,2 v + 9,8$ · c) $v(10) \approx 42,37$ m/s ; limite 49 m/s.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une cuve qui se remplit

- a) **Condition initiale** : $V(0) = 300 - 200 = 100$.

- $V'(t) = -200 \times (-0,04) e^{-0,04t} = 8 e^{-0,04t}$.

- $12 - 0,04 V(t) = 12 - 12 + 8 e^{-0,04t} = 8 e^{-0,04t}$. L'équation est vérifiée.

- b) L'équation donne la pente à partir de la valeur :

$$V'(0) = 12 - 0,04 \times V(0) = 12 - 4 = 8 \text{ L/min}$$

- Au départ, la cuve gagne 8 L par minute : 12 L entrent, 4 L fuient.

- c) $e^{-0,04t} \rightarrow 0$, donc $V(t) \rightarrow 300$ L. C'est le volume où la fuite égale l'arrivée : $0,04 V = 12$.

- d) On résout $V(t) = 250$:

- $200 e^{-0,04t} = 50$, soit $e^{-0,04t} = 0,25$.

- On applique $\ln$: $-0,04 t = \ln 0,25 = -\ln 4$.

$$t = \frac{\ln 4}{0,04} \approx 34,7 \text{ min}$$

- **Conclusion** : la cuve atteint 250 L au bout d'environ 34 min 40 s, et n'atteindra jamais tout à fait 300 L.

Réponse. b) 8 L/min · c) 300 L · d) environ 34,7 min.