

Plaquette 1 - $y' = ay + b$: solutions, condition initiale, régimes

Équations différentielles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Les solutions de $y' = ay$ (avec a réel) sont

$$y(t) = C e^{at} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

- Les solutions de $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont

$$y(t) = C e^{at} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

La constante $-\frac{b}{a}$ est la **solution particulière constante** (régime permanent) : on la retrouve en cherchant y constante, donc $y' = 0$, soit $0 = ay + b$.

- Une **condition initiale** $y(0) = y_0$ détermine C et donc une **unique** solution.
- Si $a < 0$, la solution tend vers $-\frac{b}{a}$: c'est un régime **stable** ; si $a > 0$, elle diverge.
- **Constante de temps** : pour $y' = -\frac{1}{\tau}y + b$, on a $\tau = -\frac{1}{a}$; le régime est atteint à 63 % en $t = \tau$ et à 99,3 % en $t = 5\tau$.
- Vérification obligatoire : on **dérive** la solution trouvée et on la réinjecte dans l'équation.
- Rappels : $(e^{at})' = a e^{at}$ et $e^0 = 1$.

Correction de l'exercice 1 - Solutions de $y' = ay$

Formule du cours : les solutions de $y' = ay$ sont $y(t) = C e^{at}$.

- a) $a = 3$: $y(t) = C e^{3t}$.
- b) $a = -0,5$: $y(t) = C e^{-0,5t}$.
- c) $a = 1$: $y(t) = C e^t$.
- Vérification de a) : $y'(t) = 3C e^{3t} = 3y(t)$. Correct.

Réponse. a) $C e^{3t}$ · b) $C e^{-0,5t}$ · c) $C e^t$.

Correction de l'exercice 2 - Condition initiale

- Forme générale : $y(t) = C e^{-2t}$.
 - Condition initiale : $y(0) = C e^0 = C = 5$.
- $$y(t) = 5 e^{-2t}$$
- Vérification : $y'(t) = -10 e^{-2t} = -2 \times 5 e^{-2t} = -2y(t)$, et $y(0) = 5$. Les deux conditions sont satisfaites.

Réponse. $y(t) = 5 e^{-2t}$.

Correction de l'exercice 3 - Solutions de $y' = ay + b$

On identifie $a = -4$ et $b = 12$.

- **Solution constante** : on cherche y constante, donc $y' = 0$, soit $0 = -4y + 12$, d'où $y = 3$. (C'est aussi $-\frac{b}{a} = -\frac{12}{-4} = 3$.)
- Formule du cours :

$$y(t) = C e^{-4t} + 3 \quad C \in \mathbb{R}$$

- Vérification : $y'(t) = -4C e^{-4t}$ et $-4y + 12 = -4C e^{-4t} - 12 + 12 = -4C e^{-4t}$. Les deux coïncident.

Réponse. $y(t) = C e^{-4t} + 3$.

Correction de l'exercice 4 - Solution particulière et condition initiale

- Solution constante : $0 = -5y + 20$ donne $y = 4$.
- Forme générale : $y(t) = C e^{-5t} + 4$.
- Condition initiale : $y(0) = C + 4 = 0$, donc $C = -4$.

$$y(t) = -4 e^{-5t} + 4 = 4(1 - e^{-5t})$$

- Vérification : $y'(t) = 20 e^{-5t}$ et $-5y + 20 = -20 + 20e^{-5t} + 20 = 20e^{-5t}$. Correct.
- On reconnaît la forme classique d'une **charge** : départ de 0, montée vers 4.

Réponse. $y(t) = 4(1 - e^{-5t})$.

Correction de l'exercice 5 - Régime permanent

La limite est la solution **constante** $-\frac{b}{a}$, à condition que $a < 0$.

- $-\frac{15}{-3} = 5$: la solution tend vers 5 (car $a = -3 < 0$).
- $-\frac{1}{-0,2} = 5$: elle tend aussi vers 5, mais plus lentement ($\tau = 5$ contre $\tau = \frac{1}{3}$).
- Ici $a = 2 > 0$: le terme Ce^{2t} **explose** (sauf si $C = 0$). La solution ne tend vers aucune valeur finie : le régime est **instable**.

Réponse. a) 5 · b) 5 (plus lentement) · c) aucune limite finie ($a > 0$).

Correction de l'exercice 6 - Constante de temps

- Solution constante : $0 = -50y + 600$ donne $y = 12$.
— Forme générale : $y(t) = C e^{-50t} + 12$, et $y(0) = 0$ donne $C = -12$.

$$y(t) = 12(1 - e^{-50t})$$

- Régime permanent : 12. Constante de temps : $\tau = -\frac{1}{a} = \frac{1}{50} = 0,02$ s.

- $y(0,02) = 12(1 - e^{-1}) \approx 12 \times 0,632 \approx 7,59$.

— C'est bien 63,2 % de 12 : la règle du cours est vérifiée.

Réponse. a) $y(t) = 12(1 - e^{-50t})$ · b) régime 12, $\tau = 0,02$ s · c) $\approx 7,59$, soit 63,2 %.

Correction de l'exercice 7 - Vérifier qu'une fonction est solution

On dérive puis on compare les deux membres.

- $f(t) = 3 \times (-2)e^{-2t} = -6e^{-2t}$.
- $-2f(t) + 14 = -2(3e^{-2t} + 7) + 14 = -6e^{-2t} - 14 + 14 = -6e^{-2t}$.
- Les deux expressions sont **égales** : f est bien solution de l'équation.

- Contrôle par la forme générale : les solutions sont $Ce^{-2t} - \frac{14}{-2} = Ce^{-2t} + 7$, et f correspond à $C = 3$.

Réponse. Oui, f est solution (elle correspond à $C = 3$).

Correction de l'exercice 8 - Charge d'un circuit RC

a) $RC = 1\,000 \times 10^{-5} = 0,01$ s (c'est la constante de temps τ).

- $\frac{1}{RC} = 100$ et $\frac{E}{RC} = \frac{9}{0,01} = 900$, donc

$$u' = -100u + 900$$

b) Solution constante : $0 = -100u + 900$ donne $u = 9$ (la tension d'alimentation, régime permanent).

- Forme générale : $u(t) = Ce^{-100t} + 9$, et $u(0) = 0$ donne $C = -9$.

$$u(t) = 9(1 - e^{-100t})$$

c) $u(0,01) = 9(1 - e^{-1}) \approx 9 \times 0,632 \approx 5,69$ V.

- Cohérent : à $t = \tau$, on atteint 63,2 % des 9 V.

Réponse. a) $RC = 0,01$ s et $u' = -100u + 900$ · b) $u(t) = 9(1 - e^{-100t})$ · c) $\approx 5,69$ V.

Correction de l'exercice 9 - Décharge d'un circuit

a) Forme générale : $u(t) = Ce^{-20t}$, et $u(0) = C = 6$, donc $u(t) = 6e^{-20t}$.

b) $u(0,1) = 6e^{-2} \approx 6 \times 0,135\,34 \approx 0,81$ V.

c) On résout $6e^{-20t} = 0,5$, soit $e^{-20t} = \frac{1}{12}$.

- On applique $\ln$: $-20t = -\ln 12$, donc

$$t = \frac{\ln 12}{20} \approx \frac{2,484\,9}{20} \approx 0,124$$
 s

- Contrôle : $6e^{-20 \times 0,124} \approx 6 \times 0,0837 \approx 0,50$ V. Cohérent.

Réponse. a) $u(t) = 6e^{-20t}$ · b) $\approx 0,81$ V · c) $t \approx 0,124$ s.

Correction de l'exercice 10 - Refroidissement (loi de Newton)

a) On développe : $T' = -0,05T + 1$, donc $a = -0,05$ et $b = 1$.

b) Solution constante : $0 = -0,05T + 1$ donne $T = 20$ (la température ambiante).

- Forme générale : $T(t) = Ce^{-0,05t} + 20$, et $T(0) = C + 20 = 180$ donne $C = 160$.

$$T(t) = 160e^{-0,05t} + 20$$

c) $T(30) = 160e^{-1,5} + 20 \approx 160 \times 0,223\,13 + 20 \approx 35,7 + 20 = 55,7$ °C.

- Température limite : $e^{-0,05t}$ tend vers 0, donc T tend vers 20 °C, la température ambiante. Physiquement satisfaisant.

Réponse. a) $T' = -0,05T + 1$ · b) $T(t) = 160e^{-0,05t} + 20$ · c) $\approx 55,7$ °C, limite 20 °C.

Correction de l'exercice 11 - Retrouver l'équation

a) $y(0) = 25 - 15 = 10$.

- Quand t augmente, $e^{-0,4t}$ tend vers 0 : y tend vers 25.

b) On dérive : $y'(t) = -15 \times (-0,4)e^{-0,4t} = 6e^{-0,4t}$.

— Or de $y = 25 - 15e^{-0,4t}$ on tire $e^{-0,4t} = \frac{25-y}{15}$.

— En remplaçant : $y' = 6 \times \frac{25-y}{15} = 0,4(25-y) = -0,4y + 10$.

$$y' = -0,4y + 10$$

— Contrôle : la solution constante de cette équation est $-\frac{10}{-0,4} = 25$, ce qui correspond bien à la limite trouvée.

Réponse. a) $y(0) = 10$, limite 25 · b) $y' = -0,4y + 10$.

Correction de l'exercice 12 - Croissance avec $a > 0$

a) Forme générale : $P(t) = Ce^{0,03t}$, et $P(0) = C = 50\,000$.

$$P(t) = 50\,000e^{0,03t}$$

b) $P(20) = 50\,000e^{0,6} \approx 50\,000 \times 1,822\,12 \approx 91\,106$ habitants.

c) On résout $e^{0,03t} = 2$:

— $0,03t = \ln 2$, donc $t = \frac{\ln 2}{0,03} \approx \frac{0,693\,1}{0,03} \approx 23,10$ ans.

— Ici $a > 0$: la croissance est exponentielle, sans limite dans ce modèle — ce qui en limite la validité à long terme.

Réponse. a) $P(t) = 50\,000e^{0,03t}$ · b) $\approx 91\,106$ · c) $\approx 23,10$ ans.

Correction de l'exercice 13 - Condition donnée en $t = 2$

Forme générale. Solution constante : $0 = -y + 4$ donne $y = 4$, donc

$$y(t) = Ce^{-t} + 4 \quad C \in \mathbb{R}$$

Condition en $t = 2$ (et non en 0 : C n'est pas directement lisible).

— $y(2) = Ce^{-2} + 4 = 1$, donc $Ce^{-2} = -3$ et $C = -3e^2$.

— $y(t) = 4 - 3e^2e^{-t} = 4 - 3e^{2-t}$.

Valeurs.

— $y(0) = 4 - 3e^2 \approx -18,17$;

— $y(3) = 4 - 3e^{-1} \approx 2,90$.

— Vérification : $y(2) = 4 - 3e^0 = 1$, et $y'(t) = 3e^{2-t} = -y(t) + 4$. Correct.

— **Piège** : écrire $C = 1 - 4 = -3$ comme si la condition portait sur $t = 0$ donnerait $y(2) = 4 - 3e^{-2} \approx 3,59 \neq 1$.

Réponse. $y(t) = 4 - 3e^{2-t}$; $y(0) \approx -18,17$; $y(3) \approx 2,90$.

Correction de l'exercice 14 - Dimensionner une résistance

La solution. Solution constante : $u = E = 5$ V. Avec $u(0) = 0$ et $\tau = RC$:

$$u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

Traduire l'objectif. $u(t) = 0,993E$ équivaut à $e^{-t/\tau} = 0,007$, soit $\frac{t}{\tau} = -\ln 0,007 \approx 4,96$.

— C'est la règle du cours : le régime est atteint à 99,3 % en 5τ .

— On veut $5\tau = 0,1$ s, donc $\tau = 0,02$ s.

Calcul de R . $\tau = RC$ donne $R = \frac{\tau}{C} = \frac{0,02}{10 \times 10^{-6}} = 2\,000\ \Omega$.

— Contrôle : $1 - e^{-5} \approx 0,993\,3$. Correct.

— **Sens physique** : plus R est grande, plus la charge est lente. Pour charger plus vite, on diminue R (ou C).

Réponse. $R = 2\,000\ \Omega$ ($\tau = 0,02\ \text{s}$).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : deux régimes enchaînés

a) Solution constante : $0 = -100u + 500$ donne $u = 5\ \text{V}$.

— $u(t) = Ce^{-100t} + 5$ avec $u(0) = 0$, donc $C = -5$:

$$u(t) = 5(1 - e^{-100t})$$

— $u(0,03) = 5(1 - e^{-3}) \approx 5 \times 0,950\,2 \approx 4,75\ \text{V}$.

b) La décharge part de la valeur atteinte, soit $4,75\ \text{V}$, et suit $u' = -100u$:

$$u(t) = 4,75 e^{-100t}$$

c) On résout $4,75 e^{-100t} = 1$, soit $e^{-100t} = \frac{1}{4,75}$.

— $-100t = -\ln 4,75$, donc $t = \frac{\ln 4,75}{100} \approx \frac{1,558\,1}{100} \approx 0,0156\ \text{s}$.

— Soit environ $15,6\ \text{ms}$, ce qui correspond à $1,56\tau$: cohérent avec $\tau = 0,01\ \text{s}$.

Réponse. a) $u(t) = 5(1 - e^{-100t})$, $u(0,03) \approx 4,75\ \text{V}$ · b) $u(t) = 4,75e^{-100t}$ · c) $\approx 0,0156\ \text{s}$.