

Plaquette 2 - $y' = ay$: reconnaître, résoudre, vérifier

Équations différentielles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation $y' = ay$.

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont **toutes** les fonctions

$$y(t) = C e^{at} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

- Il y en a une infinité : elles forment une **famille** de courbes, une par valeur de C .
- **Condition initiale** : $y(0) = C e^0 = C$. Donc C est exactement la valeur en 0, et une condition initiale sélectionne **une seule** solution.
- **Vérification obligatoire** : on dérive la solution trouvée et on la réinjecte dans l'équation. C'est le seul contrôle qui garantit le résultat.
- **Signe de a** :
 - $a > 0$: croissance exponentielle, la solution diverge ;
 - $a < 0$: décroissance vers 0, régime stable ;
 - $a = 0$: $y' = 0$, les solutions sont les fonctions constantes.
- **Traduction d'un énoncé** : « la vitesse de variation est proportionnelle à la quantité présente » s'écrit $y' = ay$. Le coefficient a est **négatif** si la quantité diminue.
- Rappels : $(e^{at})' = a e^{at}$, $e^0 = 1$, $(Cf)' = C f$.

Correction de l'exercice 1 - Les solutions d'une équation simple

On applique directement le théorème du cours : les solutions de $y' = ay$ sont $y(t) = C e^{at}$.

- Ici $a = 3$, donc :

$$y(t) = C e^{3t} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Vérification.

- $y'(t) = 3C e^{3t}$.
- $3y(t) = 3C e^{3t}$.
- Les deux coïncident : toute fonction de cette forme est bien solution.
- **Rédaction attendue** : ne pas oublier « avec $C \in \mathbb{R}$ ». L'équation a une **infinité** de solutions, et en donner une seule (par exemple e^{3t}) est une réponse incomplète.

Réponse. $y(t) = C e^{3t}$, $C \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2 - Un coefficient négatif

Résolution. Ici $a = -0,4$.

$$y(t) = C e^{-0,4t} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Comportement à l'infini.

- $e^{-0,4t}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.
- Donc toutes les solutions tendent vers 0, quelle que soit la valeur de C .
- Si $C > 0$, la décroissance se fait par valeurs positives ; si $C < 0$, par valeurs négatives.

- Si $C = 0$, la solution est la **fonction nulle**, qui est bien solution ($0' = -0,4 \times 0$).
- **Interprétation** : $a < 0$ signale un phénomène qui **s'éteint**. C'est le cas de toutes les décharges, refroidissements et désintégrations.

Réponse. $y(t) = C e^{-0,4t}$; toutes les solutions tendent vers 0.

Correction de l'exercice 3 - Une équation à réécrire

Mise sous forme standard. L'équation n'est pas écrite sous la forme $y' = ay$: il faut d'abord isoler y' .

- $2y' = -6y$.
- On divise par 2 : $y' = -3y$.

Résolution. On identifie $a = -3$.

$$y(t) = C e^{-3t} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Vérification dans l'équation de départ.

- $y'(t) = -3C e^{-3t}$.
- $2y' + 6y = -6C e^{-3t} + 6C e^{-3t} = 0$. Correct.
- **Piège du signe** : en passant $6y$ de l'autre côté, il devient $-6y$. Oublier ce changement donnerait $y = C e^{3t}$, une solution qui **explose** au lieu de s'éteindre — une erreur visible physiquement.

Réponse. $y(t) = C e^{-3t}$, $C \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4 - Avec une condition initiale

Étape 1 — la forme générale. Avec $a = 0,5$:

$$y(t) = C e^{0,5t}.$$

Étape 2 — utiliser la condition initiale.

- $y(0) = C e^0 = C \times 1 = C$.
- La condition $y(0) = 4$ donne donc $C = 4$.

Solution.

$$y(t) = 4 e^{0,5t}$$

Vérification.

- $y'(t) = 4 \times 0,5 e^{0,5t} = 2 e^{0,5t}$ et $0,5 y(t) = 2 e^{0,5t}$. Correct.
- $y(0) = 4 e^0 = 4$. Correct.
- **À retenir** : pour $y' = ay$, la constante C est **toujours** la valeur initiale $y(0)$. On peut donc écrire directement $y(t) = y(0) e^{at}$.

Réponse. $y(t) = 4 e^{0,5t}$.

Correction de l'exercice 5 - Une condition en un autre point

Étape 1 — la forme générale.

$$y(t) = C e^{-2t}.$$

Étape 2 — utiliser la condition. Cette fois elle porte sur $t = 1$, pas sur $t = 0$.

- $y(1) = C e^{-2}$.
- On résout $C e^{-2} = 5$, donc $C = \frac{5}{e^{-2}} = 5 e^2$.

Solution.

$$y(t) = 5e^{2-2t} = 5e^{2-2t}$$

Vérification.

- $y(1) = 5e^{2-2} = 5e^0 = 5$. Correct.
- $y'(t) = -2 \times 5e^{2-2t} = -2y(t)$. Correct.
- **Attention** : C n'est la valeur initiale **que** si la condition porte sur $t = 0$. Ici $y(0) = 5e^2 \approx 36,95$, très différent de 5.

Réponse. $y(t) = 5e^{2-2t}$.

Correction de l'exercice 6 - Vérifier qu'une fonction est solution**Méthode : on dérive et on réinjecte.**

$$- f(t) = 7 \times (-0,25)e^{-0,25t} = -1,75e^{-0,25t}.$$

Calcul du membre de gauche.

$$\begin{aligned} - 4f(t) + f(t) &= 4 \times (-1,75e^{-0,25t}) + 7e^{-0,25t}. \\ - &= -7e^{-0,25t} + 7e^{-0,25t} = 0. \end{aligned}$$

Conclusion. L'égalité est vérifiée pour tout t : f est solution.

Contrôle par la résolution directe.

- $4y' + y = 0$ s'écrit $y' = -0,25y$, dont les solutions sont $Ce^{-0,25t}$.
- f correspond à $C = 7$: elle appartient bien à la famille.
- **Deux méthodes équivalentes** : vérifier par substitution, ou résoudre et comparer. La première est plus rapide quand l'énoncé fournit la fonction.

Réponse. Oui : $4f' + f = 0$, et f correspond à $C = 7$.

Correction de l'exercice 7 - Une fonction qui n'est pas solution**Calcul de la dérivée.**

$$- g'(t) = 3 \times 2e^{2t} = 6e^{2t} \text{ (la dérivée de la constante 1 est nulle).}$$

Calcul de $2g(t)$.

$$- 2g(t) = 2(3e^{2t} + 1) = 6e^{2t} + 2.$$

Comparaison.

- $g'(t) = 6e^{2t}$ et $2g(t) = 6e^{2t} + 2$.
- Ces deux expressions diffèrent de 2 : elles ne sont **jamais** égales.
- Donc g **n'est pas** solution de $y' = 2y$.
- **Ce que le terme constant change** : ajouter 1 à une solution de $y' = ay$ ne donne plus une solution. En revanche, g est solution de $y' = 2y - 2$ — une équation de la forme $y' = ay + b$, objet de la plaquette suivante.

Réponse. Non : $g'(t) = 6e^{2t}$ alors que $2g(t) = 6e^{2t} + 2$.

Correction de l'exercice 8 - Traduire un énoncé

- a) « La vitesse de croissance est proportionnelle à l'effectif » se traduit par $P' = kP$.
- Le coefficient est donné : $k = 0,03$, et il est **positif** puisqu'il s'agit d'une croissance.

$$P' = 0,03P$$

$$- \text{Solutions : } P(t) = P_0 e^{0,03t}.$$

- b) « La masse **diminue** » impose un coefficient **négatif** dans l'équation.

$$m' = -0,12m$$

- Solutions : $m(t) = m_0 e^{-0,12t}$.
- **Le point à ne pas rater** : l'énoncé annonce « un coefficient de proportionnalité 0,12 », sans signe. C'est le mot « diminue » qui impose le moins. Écrire $m' = 0,12m$ donnerait une masse qui **croît** indéfiniment.
- **Contrôle de bon sens** : après avoir résolu, on vérifie toujours que la solution croît ou décroît comme l'énoncé le dit.

Réponse. a) $P' = 0,03P$ · b) $m' = -0,12m$.

Correction de l'exercice 9 - Désintégration radioactive

a) **Forme générale.** Avec $a = -0,02$:

$$N(t) = C e^{-0,02t}.$$

Condition initiale.

$$N(0) = C = 5\,000.$$

$$N(t) = 5\,000 e^{-0,02t}$$

$$b) - N(30) = 5\,000 e^{-0,6} \approx 5\,000 \times 0,548\,81 \approx 2\,744 \text{ noyaux.}$$

Contrôle.

- Il reste environ 54,9 % des noyaux après 30 ans, ce qui est cohérent avec une demi-vie de $\frac{\ln 2}{0,02} \approx 34,66$ ans : à 30 ans, on n'a pas encore atteint la moitié.
- **Sens physique de λ** : c'est la proportion de noyaux qui se désintègrent par unité de temps, ici 2 % par an. L'équation $N' = -\lambda N$ dit exactement cela.

Réponse. a) $N(t) = 5\,000 e^{-0,02t}$ · b) environ 2 744 noyaux.

Correction de l'exercice 10 - Un placement à intérêts continus

a) - Forme générale : $C(t) = K e^{0,045t}$.

— Condition initiale : $C(0) = K = 8\,000$.

$$C(t) = 8\,000 e^{0,045t}$$

$$b) - C(10) = 8\,000 e^{0,45} \approx 8\,000 \times 1,568\,31 \approx 12\,546,50 \text{ €.}$$

Comparaison avec des intérêts annuels.

- À 4,5 % versés une fois par an, on aurait $8\,000 \times 1,045^{10} \approx 12\,423,76 \text{ €}$.
- L'écart, environ 122,74 €, vient de la **capitalisation continue** : les intérêts produisent eux-mêmes des intérêts en permanence.
- **Vocabulaire** : $e^{0,045} \approx 1,046\,03$, donc un taux continu de 4,5 % équivaut à un taux annuel effectif de 4,603 %.

Réponse. a) $C(t) = 8\,000 e^{0,045t}$ · b) environ 12 546,50 €.

Correction de l'exercice 11 - Retrouver le coefficient

Étape 1 — la forme de la solution.

- $y(t) = C e^{at}$, et $y(0) = C = 100$.
- Donc $y(t) = 100 e^{at}$.

Étape 2 — utiliser la seconde condition.

$$— y(5) = 100 e^{5a} = 40, \text{ soit } e^{5a} = 0,4.$$

Étape 3 — appliquer le logarithme.

$$- 5a = \ln 0,4, \text{ donc } a = \frac{\ln 0,4}{5} \approx \frac{-0,91629}{5} \approx -0,183.$$

Vérification.

- $y(5) = 100 e^{-0,91629} \approx 100 \times 0,400 = 40$. Correct.
- **Cohérence du signe** : a est négatif, ce qui est attendu puisque la fonction **décroît** de 100 à 40. Un a positif aurait signalé une erreur de calcul.
- **Remarque** : deux mesures suffisent toujours à caler un modèle $y' = ay$ — l'une donne C , l'autre donne a .

Réponse. $a = \frac{\ln 0,4}{5} \approx -0,183.$

Correction de l'exercice 12 - Deux solutions à comparer

a) - $f(t) = 10 e^{-0,5t}.$

— $g(t) = 40 e^{-0,5t}.$

b) Calcul du rapport.

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{40 e^{-0,5t}}{10 e^{-0,5t}} = 4$$

- Le rapport est **constant**, égal à 4, pour tout t : l'exponentielle se simplifie.

Interprétation.

- Deux solutions de la même équation $y' = ay$ restent toujours dans le **même rapport**, celui de leurs valeurs initiales.
- **Conséquence pratique** : dans une décroissance radioactive, deux échantillons de tailles différentes perdent la même **proportion** au même moment, et leur rapport ne change jamais. C'est pourquoi la demi-vie ne dépend pas de la quantité initiale.
- **Attention** : cette propriété est fausse pour $y' = ay + b$, où la constante $-\frac{b}{a}$ brise la proportionnalité.

Réponse. a) $10 e^{-0,5t}$ et $40 e^{-0,5t}$ · b) le rapport vaut 4, constant.

Correction de l'exercice 13 - De l'équation au temps de demi-vie

a) **Solution.** $q(t) = q_0 e^{-0,08t}.$

Mise en équation. On cherche T tel que $q(T) = \frac{q_0}{2}.$

— $q_0 e^{-0,08T} = \frac{q_0}{2}$, et l'on simplifie par $q_0 \neq 0$.

— $e^{-0,08T} = 0,5$, donc $-0,08T = -\ln 2$.

$$T = \frac{\ln 2}{0,08} \approx 8,66 \text{ heures}$$

b) **Non.** La quantité initiale q_0 s'est **simplifiée** dès la deuxième ligne du calcul.

- Le temps de demi-vie ne dépend que du coefficient a , jamais de la quantité présente.
- **Formule générale** : $T = \frac{\ln 2}{|a|}.$
- **Ce que cela signifie** : le phénomène n'a pas de « mémoire ». Quelle que soit la quantité restante à un instant donné, il faudra toujours 8,66 h pour qu'elle soit à nouveau divisée par deux.

Réponse. a) $T = \frac{\ln 2}{0,08} \approx 8,66 \text{ h}$ · b) non, q_0 se simplifie.

Correction de l'exercice 14 - Croissance et seuil

a) - $P(t) = 2\,000 e^{0,15t}$.

— $P(12) = 2\,000 e^{1,8} \approx 2\,000 \times 6,049\,65 \approx 12\,099$ bactéries.

b) On résout $2\,000 e^{0,15t} > 50\,000$.

— $e^{0,15t} > 25$.

— $0,15t > \ln 25$, avec $\ln 25 \approx 3,218\,88$.

$$t > \frac{\ln 25}{0,15} \approx 21,46 \text{ heures}$$

— La population dépasse 50 000 au bout d'environ 21,5 heures.

Vérification.

— $P(21,46) = 2\,000 e^{3,219} \approx 50\,000$. Correct.

— **Limite du modèle** : prolongé à 100 heures, il donnerait $P(100) \approx 6,5$ milliards de bactéries — un nombre impossible dans un milieu fini. Un modèle $y' = ay$ avec $a > 0$ n'est valable que sur un **temps limité**, tant que les ressources ne manquent pas.

Réponse. a) $P(t) = 2\,000 e^{0,15t}$ et $P(12) \approx 12\,099$ · b) environ 21,46 h.

Correction de l'exercice 15 - Familles de courbes

a) Les solutions sont $y(t) = C e^{-t}$. Trois exemples :

— $C = 1$: $y(t) = e^{-t}$;

— $C = -2$: $y(t) = -2 e^{-t}$;

— $C = 0$: $y(t) = 0$, la fonction nulle.

b) **Par le point** $A(0; 3)$.

— Il faut $y(0) = 3$, soit $C = 3$: une seule solution, $y(t) = 3 e^{-t}$.

Par le point $B(2; 1)$.

— Il faut $C e^{-2} = 1$, soit $C = e^2 \approx 7,389$: là encore, une seule solution.

— **Résultat fondamental** : par **tout** point du plan passe une solution et une seule. Les courbes solutions remplissent le plan sans jamais se croiser — sinon deux solutions différentes partageraient un point, ce que le théorème interdit.

— **Conséquence physique** : connaître l'état d'un système à un seul instant suffit à déterminer toute son évolution, passée et future. C'est le **déterminisme** des modèles différentiels.

Réponse. a) e^{-t} , $-2 e^{-t}$, 0 · b) une seule dans chaque cas.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : datation au carbone 14

a) **Relation entre λ et la demi-vie.** La solution est $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, et $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

— Donc $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693\,147}{5\,730} \approx 0,000\,121 \text{ an}$.

b) On résout $e^{-\lambda t} = 0,62$.

— $-\lambda t = \ln 0,62 \approx -0,478\,036$.

— $t = \frac{0,478\,036}{0,000\,121} \approx 3\,951 \text{ ans}$.

— L'échantillon a donc environ 4 000 ans.

c) On résout $e^{-\lambda t} = 0,02$.

— $-\lambda t = \ln 0,02 \approx -3,912\,023$.

— $t = \frac{3,912\,023}{0,000\,121} \approx 32\,331$ ans.

Fiabilité. Il ne reste que 2 % du carbone 14 initial.

— Une erreur de mesure de 0,1 point (donc de 2,0 à 2,1 %) déplace la date de plus de 400 ans.

— À ces proportions, le signal devient comparable au bruit de mesure : la datation est **beaucoup moins précise** qu'à 62 %.

d) On résout $e^{-\lambda t} = 0,01$.

— $t = \frac{\ln 100}{\lambda} = \frac{4,605\,170}{0,000\,121} \approx 38\,059$ ans.

— **Conclusion** : la méthode au carbone 14 plafonne vers 38 000 à 40 000 ans, ce qui correspond à environ 6,6 **demi-vies**. Au-delà, il faut recourir à d'autres isotopes, de demi-vie beaucoup plus longue — c'est exactement ce que font les géologues avec le potassium-argon ou l'uranium-plomb.

— **Ce que le calcul montre** : la limite d'une méthode de datation ne tient pas à la physique de la désintégration, mais à la **précision de la mesure** de la proportion restante.

Réponse. a) $\lambda \approx 0,000\,121$ an · b) environ 3 951 ans · c) environ 32 331 ans, avec une précision médiocre · d) au-delà d'environ 38 000 ans.