

Plaquette 4 - Méthode d'Euler : construire une solution pas à pas

Équations différentielles — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Quand on ne sait pas résoudre une équation, ou qu'on veut une valeur approchée rapidement, on avance **pas à pas** : l'équation donne la pente en chaque point, et on suit cette pente sur un petit intervalle h . On construit ainsi des valeurs $y_0, y_1, y_2, \dots$ aux instants $0, h, 2h, \dots$. On apprend ici à calculer ces valeurs à la main et en Python, à les comparer à la solution exacte, et à choisir le pas.

Exercice 1 - Un premier pas

La fonction y vérifie $y' = -y$ et $y(0) = 1$.

- Calculer $y'(0)$.
- Avec la méthode d'Euler et un pas $h = 0,1$, donner une valeur approchée de $y(0,1)$.
- La solution exacte est $y(t) = e^{-t}$. Calculer l'erreur commise, à 10^{-4} près.

Exercice 2 - Deux pas de suite

On considère $y' = 2y$ avec $y(0) = 1$, et un pas $h = 0,1$.

- Calculer y_1 puis y_2 , valeurs approchées de $y(0,1)$ et $y(0,2)$.
- La solution exacte est $y(t) = e^{2t}$. Comparer y_2 à $y(0,2)$.

Exercice 3 - Un tableau de valeurs

On considère $y' = -0,5y + 2$ avec $y(0) = 0$ et un pas $h = 0,5$.

- Montrer que la méthode d'Euler s'écrit $y_{n+1} = 0,75y_n + 1$.
- Compléter le tableau.

n	0	1	2	3	4
t_n	0	0,5	1	1,5	2
y_n	0				

- La solution exacte est $y(t) = 4(1 - e^{-0,5t})$. Comparer y_4 à $y(2)$.

Exercice 4 - La relation de récurrence

- Montrer que, pour l'équation $y' = ay + b$ et un pas h , la méthode d'Euler donne $y_{n+1} = (1 + ah)y_n + hb$.
- Écrire cette relation pour $u' = -10u + 50$ et $h = 0,01$.
- Quelle est la nature de la suite (y_n) quand $b = 0$?

Exercice 5 - Diviser le pas

On considère $y' = y$, $y(0) = 1$, dont la solution exacte est e^t . On veut approcher $y(1) = e$.

- Montrer qu'avec un pas $h = \frac{1}{N}$, la méthode d'Euler donne $y(1) \approx (1 + h)^N$.
- Calculer cette valeur pour $h = 1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,1$, à 10^{-4} près.
- Commenter en comparant à $e \approx 2,7183$.

Exercice 6 - Un pas trop grand

On considère $y' = -3y$, $y(0) = 1$.

- Calculer y_1, y_2, y_3 avec un pas $h = 1$. Ces valeurs sont-elles plausibles ?
- Recommencer avec $h = 0,1$.
- Pour quelles valeurs de h les valeurs d'Euler restent-elles positives ?

Exercice 7 - Intérêts pas à pas

Un capital placé à intérêts continus vérifie $K' = 0,05 K$ (t en années), avec $K(0) = 1$ (en milliers d'euros).

- Montrer qu'avec un pas $h = 1$ an, la méthode d'Euler revient à des intérêts **annuels** de 5 %.
- Calculer la valeur approchée au bout de 10 ans, puis la valeur exacte $e^{0,5}$, à 10^{-4} près.

Exercice 8 - Lire un programme Python

On considère la fonction Python suivante.

```
def euler(a, b, y0, h, n):
    y = y0
    for k in range(n):
        y = y + h * (a * y + b)
    return y
```

- Expliquer le rôle de la ligne 4.
- Quelle valeur renvoie `euler(-2, 4, 0, 0.25, 3)` ? Détailler les étapes.
- De quel instant t cette valeur est-elle une approximation ?

Exercice 9 - Un seuil en Python

Un condensateur se charge selon $u' = -100u + 500$ (u en V, t en s), avec $u(0) = 0$. On utilise la méthode d'Euler avec $h = 0,001$ s.

- Montrer que $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,5$.
- Le programme ci-dessous cherche le premier instant où la tension atteint 4,5 V. Qu'affiche-t-il ?

```
u = 0
n = 0
while u < 4.5:
```

```

u = 0.9 * u + 0.5
n = n + 1
print(n, n * 0.001)

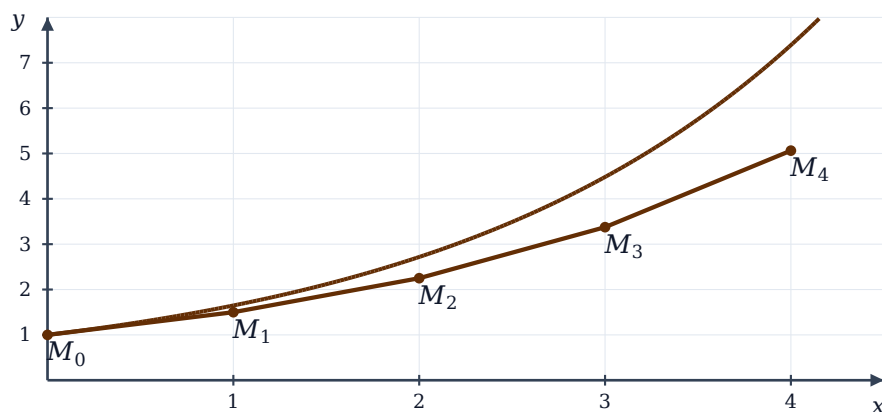
```

c) Comparer au résultat exact, obtenu avec $u(t) = 5(1 - e^{-100t})$.

Exercice 10 - Le polygone d'Euler

On considère $y' = 0,5y$ avec $y(0) = 1$ et un pas $h = 1$. Le graphique montre la solution exacte $y(t) = e^{0,5t}$ et les points d'Euler M_0 à M_4 , reliés par des segments.

- Calculer les ordonnées des points M_1 à M_4 .
- Expliquer pourquoi le polygone reste **sous** la courbe.
- Calculer l'écart en $t = 4$.



La solution exacte (courbe) et le polygone d'Euler de pas 1.

Exercice 11 - Une tasse de thé

La température T (en °C) d'un thé posé dans une pièce à 20 °C vérifie $T' = -0,1(T - 20)$, t en minutes, avec $T(0) = 90$.

- Avec la méthode d'Euler et un pas d'une minute, montrer que $T_{n+1} = 0,9T_n + 2$.
- Calculer T_1, T_2, T_3 .
- Comparer T_3 à la valeur exacte $T(3) = 20 + 70e^{-0,3}$.

Exercice 12 - Mesurer la précision

On considère $y' = -0,2y + 1$, $y(0) = 0$, dont la solution exacte est $y(t) = 5(1 - e^{-0,2t})$. On approche $y(5)$.

- Avec $h = 1$: donner la relation de récurrence et calculer y_5 .
- Avec $h = 0,5$, on admet que $y_n = 5(1 - 0,9^n)$. Calculer la valeur approchée de $y(5)$.
- Calculer l'écart relatif dans les deux cas. Que constate-t-on ?

Exercice 13 - Quand aucune formule n'existe

On cherche la fonction F telle que $F'(t) = e^{-t^2}$ et $F(0) = 0$. Aucune formule avec les fonctions usuelles ne donne F .

- a) Écrire la relation d'Euler pour cette équation.
- b) Avec $h = 0,5$, calculer une valeur approchée de $F(1)$ à 10^{-4} près.
- c) La valeur exacte est $F(1) \approx 0,7468$. L'approximation est-elle par excès ou par défaut ? Pourquoi ?

Exercice 14 - Retrouver l'équation

Un technicien a programmé la méthode d'Euler avec un pas $h = 0,1$ et obtient la relation $y_{n+1} = 0,98y_n + 0,3$.

- a) Retrouver l'équation différentielle $y' = ay + b$ qu'il approche.
- b) Quelle valeur d'équilibre la suite et la solution exacte ont-elles en commun ?

Exercice 15 - Synthèse : une perfusion

Lors d'une perfusion, la concentration C d'un médicament dans le sang (en mg/L, t en heures) vérifie $C' = -0,25C + 2$, avec $C(0) = 0$.

- a) Méthode d'Euler avec $h = 0,5$ h : montrer que $C_{n+1} = 0,875C_n + 1$, puis calculer C_1 à C_4 (à 10^{-3} près).
- b) On pose $v_n = C_n - 8$. Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire C_n en fonction de n .
- c) Résoudre l'équation exactement, puis comparer $C(2)$ à C_4 .
- d) Vers quelle concentration tendent la suite et la solution ?