

Plaquette 5 - Modéliser avec $y' = ay + b$: de l'énoncé à la décision

Équations différentielles — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Un modèle $y' = ay + b$ se reconnaît à une phrase : « la grandeur varie d'une quantité **fixe** (b) et d'une quantité **proportionnelle à elle-même** (ay) ». On s'entraîne ici à écrire l'équation à partir d'un texte, à interpréter a , b et l'équilibre $-\frac{b}{a}$, à résoudre, puis à **répondre à la question posée** : une durée, un seuil, une comparaison, un choix technique.

Exercice 1 - Du texte à l'équation

Écrire l'équation différentielle de chaque situation sous la forme $y' = ay + b$, en précisant a et b ainsi que la valeur d'équilibre.

- Un bassin reçoit 30 m^3 d'eau par heure et perd, par infiltration, 5 % de son volume V par heure.
- La vitesse de variation d'une grandeur y est proportionnelle à l'écart $50 - y$, avec un coefficient 0,4.
- Un compte rapporte 3 % par an en continu et reçoit des versements continus de 1 200 € par an.

Exercice 2 - Donner un sens aux coefficients

Le volume V (en m^3 , t en heures) du bassin de l'exercice précédent vérifie $V' = -0,05 V + 30$.

- Que représentent les nombres 30 et 0,05 ? Quelle est leur unité ?
- À quel volume le bassin se stabilise-t-il ? Justifier sans résoudre.
- Calculer la constante de temps. Au bout de combien d'heures peut-on considérer le régime permanent atteint ?

Exercice 3 - Le bassin : combien de temps ?

Le bassin précédent contient 200 m^3 à l'instant $t = 0$.

- Déterminer $V(t)$.
- Au bout de combien de temps contient-il 500 m^3 ? Arrondir à la minute.

Exercice 4 - Établissement du courant dans une bobine

Dans un circuit comportant une bobine d'inductance $L = 0,5 \text{ H}$ et une résistance $R = 10 \Omega$, alimenté sous $E = 12 \text{ V}$, l'intensité i (en A) vérifie

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

avec $i(0) = 0$.

- Écrire l'équation sous la forme $i' = ai + b$.

- b) Déterminer $i(t)$, l'intensité en régime permanent et la constante de temps.
- c) Au bout de combien de temps l'intensité atteint-elle 95 % de sa valeur finale ? Arrondir à la milliseconde.

Exercice 5 - Démarrage d'un moteur

Au démarrage d'un moteur à courant continu, la vitesse angulaire ω (en rad/s, t en s) vérifie $\omega' = -2\omega + 300$ avec $\omega(0) = 0$.

- a) Quelle est la vitesse de rotation en régime établi ? La convertir en tours par minute.
- b) Déterminer $\omega(t)$.
- c) Le moteur est jugé « lancé » à 140 rad/s. Au bout de combien de temps ? Arrondir au centième.

Exercice 6 - La montée en température d'un four

Un four est allumé dans une pièce à 20 °C. Sa température θ (en °C, t en minutes) vérifie

$$\theta' = -0,02(\theta - 20) + 4$$

avec $\theta(0) = 20$.

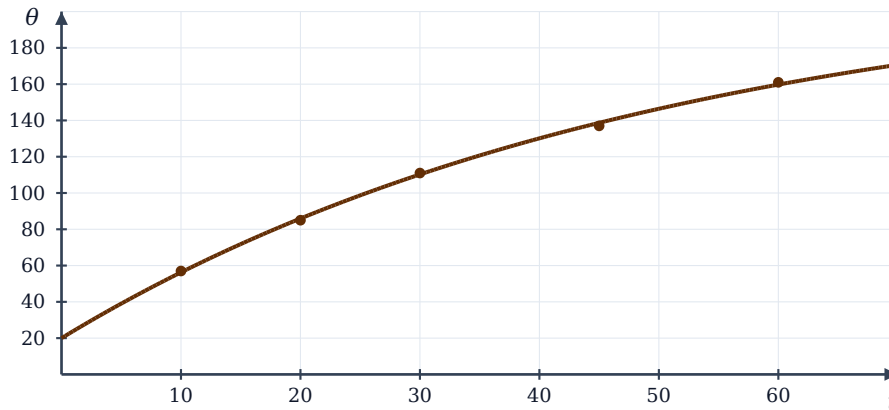
- a) Écrire l'équation sous la forme $\theta' = a\theta + b$ et en déduire la température maximale que peut atteindre le four.
- b) Déterminer $\theta(t)$.
- c) Une recette demande de préchauffer à 180 °C. Combien de temps faut-il attendre ? Arrondir à la minute.

Exercice 7 - Confronter le modèle aux mesures

Pour tester le modèle du four, $\theta(t) = 220 - 200e^{-0,02t}$, un technicien a relevé les températures suivantes (points du graphique).

t (min)	10	20	30	45	60
mesure (°C)	57	85	111	137	161

- Calculer les valeurs du modèle aux mêmes instants, au dixième.
- Calculer le plus grand écart. Le modèle est-il satisfaisant si la précision du thermomètre est de ± 2 °C ?



Le modèle (courbe) et les cinq mesures (points).

Exercice 8 - Une pêche trop intensive

Un lac compte 2 500 poissons. Sans pêche, la population croît de 10 % par an ; on en prélève 300 par an. On modélise la population par $P' = 0,1P - 300$ (t en années).

- Déterminer $P(t)$.
- Montrer que la population disparaît et dire au bout de combien de temps (au dixième d'année).
- Quel prélèvement annuel maximal permettrait de ne pas faire baisser la population ?

Exercice 9 - Épargner en continu

Un compte d'épargne, vide au départ, rapporte 3 % par an en continu et reçoit des versements réguliers équivalents à 1,2 millier d'euros par an. Le capital S (en milliers d'euros) vérifie $S' = 0,03S + 1,2$.

- Déterminer $S(t)$.
- Calculer le capital au bout de 10 ans, à l'euro près, et la part due aux intérêts.

Exercice 10 - Un lac pollué

Un lac de 2×10^6 m³ est traversé par une rivière : 40 000 m³ d'eau en sortent chaque jour. Une usine y rejette 20 kg de polluant par jour. La masse Q de polluant dans le lac (en kg, t en jours) vérifie $Q' = -0,02Q + 20$, avec $Q(0) = 0$.

- Justifier le coefficient 0,02.

b) Vers quelle masse de polluant le lac tend-il ? Quelle concentration (en g/m^3) cela représente-t-il ?

c) Une fois cet équilibre atteint, l'usine cesse ses rejets. Combien de jours faut-il pour éliminer la moitié du polluant ? 90 % ?

Exercice 11 - Un composant qui chauffe

Un composant électronique, dans un boîtier à 25°C , a une température θ (en $^\circ\text{C}$, t en min) qui vérifie $\theta' = -0,5(\theta - 25) + 15$, avec $\theta(0) = 25$. Au-delà de 70°C , il se dégrade.

a) Montrer que, dans ces conditions, il ne risque rien.

b) On double sa puissance : l'équation devient $\theta' = -0,5(\theta - 25) + 30$. Déterminer $\theta(t)$ et le temps au bout duquel le composant atteint 70°C (au centième de minute).

Exercice 12 - Identifier un modèle à partir de mesures

On mesure la tension de sortie u (en V, t en s) d'un capteur soumis à un échelon. On relève : $u(0) = 0$, $u(2) = 8$, et la tension se stabilise à 10 V. On suppose que u vérifie une équation $u' = au + b$.

a) Montrer que $u(t) = 10(1 - e^{at})$.

b) Déterminer la valeur exacte de a , puis une valeur approchée à 10^{-3} près, et en déduire b .

c) Prévoir $u(1)$, et vérifier que $u(1) = 10\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Exercice 13 - Deux radiateurs à comparer

Une pièce est à 10°C . On compare deux radiateurs ; avec chacun, la température θ (en $^\circ\text{C}$, t en minutes) vérifie :

- radiateur A : $\theta' = -0,1\theta + 6$;
- radiateur B : $\theta' = -0,05\theta + 3,5$.

a) Quelle température finale chacun permet-il d'atteindre ?

b) Lequel porte le premier la pièce à 50°C ? (Il s'agit d'une étuve de séchage.)

Exercice 14 - Le temps de réponse d'un thermomètre

Un thermomètre à 20°C est plongé dans de l'eau à 80°C . Sa température affichée T (en $^\circ\text{C}$, t en s) vérifie $T' = -\frac{1}{8}(T - 80)$.

a) Déterminer $T(t)$.

b) Que lit-on au bout de 10 s ?

c) Au bout de combien de temps la lecture est-elle juste à 1°C près ?

Exercice 15 - Synthèse : le chauffe-eau et son thermostat

L'eau d'un chauffe-eau, à 15 °C au départ, chauffe selon $\theta' = -0,01(\theta - 15) + 0,5$ (θ en °C, t en minutes).

a) Écrire l'équation sous la forme $\theta' = a\theta + b$ et donner la température d'équilibre.

b) Déterminer $\theta(t)$, puis le temps nécessaire pour atteindre 55 °C (en heures et minutes).

c) Le thermostat coupe la résistance à 60 °C ; l'eau refroidit alors selon $\theta' = -0,01(\theta - 15)$. Le thermostat relance la chauffe à 50 °C. Combien de temps dure la phase de refroidissement ?