

## Plaquette 3 - Notion de solution : vérifier, lire, combiner

### Équations différentielles — Terminale STI2D

#### Exercices

#### Méthode

Avant de résoudre, il faut savoir ce qu'**est** une solution : une fonction qui, remplacée avec sa dérivée dans l'équation, donne une égalité vraie **pour tout**  $t$ . On s'entraîne ici à vérifier une solution proposée, à passer des notations de physique ( $\frac{du}{dt}$ ) à la forme  $y' = ay + b$ , à lire une pente ou un sens de variation **sans** résoudre, et à combiner des solutions entre elles.

#### Exercice 1 - Une équation sans $y$

On considère l'équation différentielle  $y' = 2t$ .

- La fonction  $f(t) = t^2 + 5$  est-elle solution ?
- Donner toutes les solutions de cette équation.

#### Exercice 2 - Vérifier par le calcul

Montrer que la fonction  $f(t) = 4 - 3e^{-2t}$  est solution de l'équation  $y' + 2y = 8$ .

#### Exercice 3 - Trouver le bon exposant

Déterminer le réel  $k$  pour lequel la fonction  $f(t) = 5e^{kt}$  est solution de l'équation  $2y' + y = 0$ .

#### Exercice 4 - Une solution affine

On cherche une solution de l'équation  $y' = 2y - 4t$  de la forme  $f(t) = mt + p$ , où  $m$  et  $p$  sont des réels.

- Exprimer  $f'(t)$  puis  $2f(t) - 4t$  en fonction de  $t$ ,  $m$  et  $p$ .
- En déduire  $m$  et  $p$ , puis vérifier.

#### Exercice 5 - Des notations de physique

Écrire chaque équation sous la forme  $y' = ay + b$  en précisant  $a$  et  $b$ .

- $\frac{du}{dt} + 50u = 250$
- $RC \frac{du}{dt} + u = E$ , avec  $RC = 0,1$  s et  $E = 12$  V.
- $\frac{d\theta}{dt} = -0,2(\theta - 19)$

#### Exercice 6 - Une pente sans résoudre

Une fonction  $f$  est solution de  $y' = -0,5y + 3$  et sa courbe passe par le point  $A(2; 4)$ .

- Sans chercher  $f$ , calculer  $f'(2)$ .

b) En déduire une équation de la tangente à la courbe de  $f$  en  $A$ .

### Exercice 7 - Monter ou descendre ?

On considère l'équation  $y' = -2y + 6$ .

- Quelle est la solution constante ?
- Sans résoudre, expliquer pourquoi une solution qui vaut 1 en  $t = 0$  commence par croître, et pourquoi une solution qui vaut 5 en  $t = 0$  commence par décroître.
- Confirmer à l'aide de la forme générale des solutions.

### Exercice 8 - Somme de solutions

- On suppose que  $f$  et  $g$  sont deux solutions de  $y' = ay$ . Montrer que  $f + g$  et  $3f$  sont aussi solutions.
- On considère maintenant  $y' = -y + 2$  et ses deux solutions  $f(t) = 2 + e^{-t}$  et  $g(t) = 2 - 3e^{-t}$ . La fonction  $f + g$  est-elle solution ?

### Exercice 9 - D'où vient la formule du cours

On considère l'équation (E) :  $y' = -3y + 6$ .

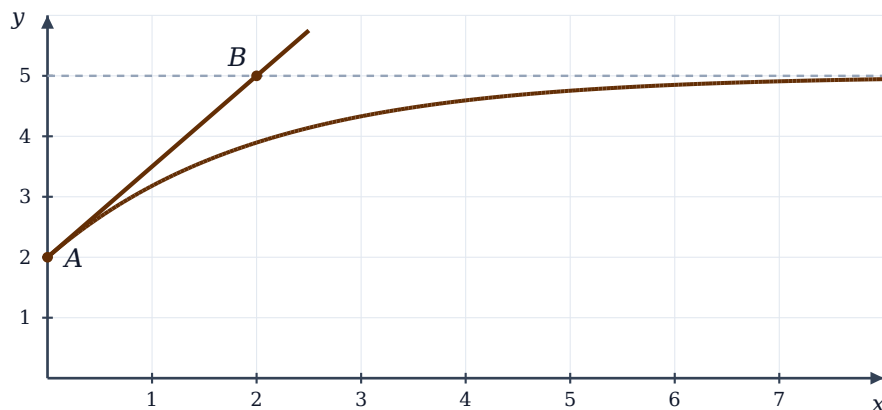
- Vérifier que la fonction constante  $g(t) = 2$  est solution de (E).
- Soit  $f$  une solution quelconque de (E) et  $h = f - g$ . Montrer que  $h$  est solution de  $y' = -3y$ .
- En déduire l'expression de toutes les solutions de (E).

### Exercice 10 - Retrouver l'équation sur une courbe

La courbe ci-dessous est celle d'une solution  $f$  d'une équation  $y' = ay + b$ . On y lit :

- $f(0) = 2$  ;
- la droite d'équation  $y = 5$  est asymptote à la courbe en  $+\infty$  ;
- la tangente  $T$  en  $t = 0$  passe par le point  $(2 ; 5)$ .

Déterminer  $a$  et  $b$ , puis l'expression de  $f$ .



La courbe de  $f$ , son asymptote  $y = 5$  (pointillés) et sa tangente  $T$  en  $A$ .

**Exercice 11 - Associer équations et solutions**

Voici quatre équations et quatre fonctions, toutes égales à 1 en  $t = 0$ . Associer chaque équation à sa solution.

- (A)  $y' = 2y$  · (B)  $y' = -2y$  · (C)  $y' = -2y + 4$  · (D)  $y' = 2y - 2$
- $f_1(t) = 2 - e^{-2t}$  ·  $f_2(t) = e^{-2t}$  ·  $f_3(t) = 1$  ·  $f_4(t) = e^{2t}$

**Exercice 12 - Un oscillateur électrique**

Dans un circuit LC idéal, la tension  $u$  aux bornes du condensateur vérifie l'équation  $u'' + \omega^2 u = 0$ , où  $u''$  est la dérivée seconde de  $u$ .

a) Montrer que  $u(t) = 3 \cos(100t)$  est solution de  $u'' + 10\,000 u = 0$ .

b) La fonction  $v(t) = 2 \sin\left(50t + \frac{\pi}{3}\right)$  est-elle solution de la même équation ?

**Exercice 13 - Corriger deux copies**

On cherche la solution de  $y' = 0,1y + 2$  vérifiant  $y(0) = 10$ . Deux élèves proposent :

- Léa :  $y(t) = 30e^{0,1t} - 20$  ;
- Tom :  $y(t) = 10e^{0,1t} + 20$ .

Qui a raison ? Justifier par une vérification, puis retrouver le résultat par la méthode du cours.

**Exercice 14 - La vitesse d'un parachutiste**

Parachute ouvert, la vitesse  $v$  (en m/s) d'un parachutiste de masse  $m = 80$  kg vérifie

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

avec  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup> et  $k = 16$  kg/s.

- a) Écrire l'équation sous la forme  $v' = av + b$ .
- b) Vérifier que  $v(t) = 49(1 - e^{-0,2t})$  est la solution telle que  $v(0) = 0$ .
- c) Calculer  $v(10)$  à 0,01 près et la vitesse limite.

**Exercice 15 - Synthèse : une cuve qui se remplit**

Une cuve reçoit 12 L/min d'eau et fuit d'un débit proportionnel à son volume, égal à 0,04  $V$  L/min. Le volume  $V(t)$  (en L,  $t$  en min) vérifie donc  $V' = 12 - 0,04V$ , avec  $V(0) = 100$ .

- a) Vérifier que  $V(t) = 300 - 200e^{-0,04t}$  est la solution cherchée.
- b) Sans utiliser l'expression de  $V$ , calculer la vitesse de remplissage à l'instant  $t = 0$ .
- c) Vers quel volume la cuve tend-elle ?
- d) Au bout de combien de temps contient-elle 250 L ? Arrondir au dixième de minute.