

Plaquette 1 - $y' = ay + b$: solutions, condition initiale, régimes

Équations différentielles — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

On résout les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$, on détermine **la** solution vérifiant une condition initiale, puis on interprète : constante de temps, régime permanent, charge et décharge, refroidissement. On vérifie toujours la solution en la dérivant.

Exercice 1 - Solutions de $y' = ay$

Donner l'ensemble des solutions de : a) $y' = 3y$ · b) $y' = -0,5y$ · c) $y' = y$.

Exercice 2 - Condition initiale

Déterminer la solution de $y' = -2y$ vérifiant $y(0) = 5$.

Exercice 3 - Solutions de $y' = ay + b$

Donner l'ensemble des solutions de $y' = -4y + 12$.

Exercice 4 - Solution particulière et condition initiale

Déterminer la solution de $y' = -5y + 20$ vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 5 - Régime permanent

Pour chaque équation, donner la valeur vers laquelle tend la solution quand t devient grand.

- a) $y' = -3y + 15$
- b) $y' = -0,2y + 1$
- c) $y' = 2y + 6$

Exercice 6 - Constante de temps

Une grandeur vérifie $y' = -50y + 600$ avec $y(0) = 0$.

- a) Déterminer $y(t)$.
- b) Donner la valeur du régime permanent et la constante de temps τ .
- c) Calculer $y(\tau)$ et vérifier la règle des 63 %.

Exercice 7 - Vérifier qu'une fonction est solution

La fonction $f(t) = 3e^{-2t} + 7$ est-elle solution de $y' = -2y + 14$?

Exercice 8 - Charge d'un circuit RC

La tension u aux bornes d'un condensateur en charge vérifie

$$u' = -\frac{1}{RC}u + \frac{E}{RC}$$

avec $E = 9 \text{ V}$, $R = 1\,000 \, \Omega$ et $C = 10^{-5} \text{ F}$, et $u(0) = 0$.

- Calculer RC et écrire l'équation avec ses valeurs numériques.
- Déterminer $u(t)$.
- Calculer $u(0,01)$ (arrondi au centième).

Exercice 9 - Décharge d'un circuit

Une tension vérifie $u' = -20u$ avec $u(0) = 6 \text{ V}$.

- Déterminer $u(t)$.
- Calculer $u(0,1)$ (arrondi au centième).
- Au bout de combien de temps la tension descend-elle sous $0,5 \text{ V}$ (arrondi au millièmme) ?

Exercice 10 - Refroidissement (loi de Newton)

La température d'une pièce vérifie $T' = -0,05(T - 20)$ (en $^{\circ}\text{C}$ par minute), avec $T(0) = 180 \, ^{\circ}\text{C}$.

- Réécrire l'équation sous la forme $T' = aT + b$.
- Déterminer $T(t)$.
- Calculer $T(30)$ (arrondi au dixième) et la température limite.

Exercice 11 - Retrouver l'équation

Une grandeur suit $y(t) = 25 - 15e^{-0,4t}$.

- Calculer $y(0)$ et la limite de y .
- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par y .

Exercice 12 - Croissance avec $a > 0$

Une population vérifie $P' = 0,03P$ (t en années), avec $P(0) = 50\,000$.

- Déterminer $P(t)$.
- Calculer $P(20)$ (arrondi à l'unité).
- Au bout de combien d'années la population double-t-elle (arrondi au centième) ?

Exercice 13 - Condition donnée en $t = 2$

Déterminer la solution de $y' = -y + 4$ vérifiant $y(2) = 1$, puis calculer $y(0)$ et $y(3)$ à 10^{-2} près.

Exercice 14 - Dimensionner une résistance

Un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$ se charge à travers une résistance R sous $E = 5 \text{ V}$; la tension vérifie $u' = -\frac{1}{RC}u + \frac{E}{RC}$, avec $u(0) = 0$.

On veut que la charge soit pratiquement terminée (99,3 % de E) en 0,1 s. Quelle valeur donner à R ?

Exercice 15 - Synthèse : deux régimes enchaînés

Un condensateur se charge selon $u' = -100u + 500$ avec $u(0) = 0$, pendant 0,03 s. On coupe ensuite l'alimentation : la décharge suit $u' = -100u$.

- Déterminer la tension pendant la charge, et calculer $u(0,03)$ (arrondi au centième).
- Déterminer l'expression de la tension pendant la décharge, en repartant de $t = 0$ au moment de la coupure.
- Au bout de combien de temps (après la coupure) la tension descend-elle sous 1 V ?