

Plaquette 2 - $y' = ay$: reconnaître, résoudre, vérifier

Équations différentielles — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Une équation différentielle relie une fonction **et sa dérivée**. La plus simple, $y' = ay$, dit que la vitesse de variation est **proportionnelle** à la valeur : c'est le modèle de tout ce qui croît ou décroît en pourcentage constant. Ses solutions sont toutes de la forme $C e^{at}$, et le seul travail consiste à identifier a , puis C grâce à la condition initiale.

Exercice 1 - Les solutions d'une équation simple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 3y$.

Exercice 2 - Un coefficient négatif

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = -0,4y$, puis décrire le comportement des solutions quand t devient grand.

Exercice 3 - Une équation à réécrire

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2y' + 6y = 0$.

Exercice 4 - Avec une condition initiale

Déterminer la solution de $y' = 0,5y$ vérifiant $y(0) = 4$.

Exercice 5 - Une condition en un autre point

Déterminer la solution de $y' = -2y$ vérifiant $y(1) = 5$.

Exercice 6 - Vérifier qu'une fonction est solution

La fonction $f(t) = 7 e^{-0,25t}$ est-elle solution de $4y' + y = 0$?

Exercice 7 - Une fonction qui n'est pas solution

La fonction $g(t) = 3 e^{2t} + 1$ est-elle solution de $y' = 2y$?

Exercice 8 - Traduire un énoncé

Écrire l'équation différentielle correspondant à chaque situation.

- Une population croît à une vitesse proportionnelle à son effectif, avec un coefficient 0,03.
- Une masse de produit diminue à une vitesse proportionnelle à la masse présente, avec un coefficient de proportionnalité 0,12.

Exercice 9 - Désintégration radioactive

Le nombre de noyaux $N(t)$ d'un échantillon vérifie $N' = -\lambda N$, avec $\lambda = 0,02$ (en an). À $t = 0$, l'échantillon compte 5 000 noyaux.

- Déterminer $N(t)$.
- Calculer $N(30)$, arrondi à l'unité.

Exercice 10 - Un placement à intérêts continus

Un capital $C(t)$ vérifie $C' = 0,045 C$ (intérêts composés en continu), avec $C(0) = 8\,000$ €.

- Déterminer $C(t)$.
- Calculer le capital au bout de 10 ans, arrondi au centime.

Exercice 11 - Retrouver le coefficient

Une fonction y vérifie $y' = ay$ avec $y(0) = 100$ et $y(5) = 40$.
Déterminer a , arrondi au millième.

Exercice 12 - Deux solutions à comparer

On considère l'équation $y' = -0,5y$ et deux solutions : f telle que $f(0) = 10$ et g telle que $g(0) = 40$.

- Donner les expressions de f et g .
- Calculer le rapport $\frac{g(t)}{f(t)}$. Que constate-t-on ?

Exercice 13 - De l'équation au temps de demi-vie

Une quantité vérifie $q' = -0,08 q$ (t en heures).

- Déterminer le temps au bout duquel la quantité est divisée par 2 (valeur exacte puis arrondie au centième).
- Ce temps dépend-il de la quantité initiale ?

Exercice 14 - Croissance et seuil

Une culture de bactéries vérifie $P' = 0,15 P$ (t en heures), avec $P(0) = 2\,000$.

- Déterminer $P(t)$ et calculer $P(12)$, arrondi à l'unité.
- Au bout de combien d'heures la population dépasse-t-elle 50 000 ?

Exercice 15 - Familles de courbes

On considère l'équation $y' = -y$.

- Donner trois solutions distinctes.
- Combien de solutions passent par le point $A(0 ; 3)$? Par le point $B(2 ; 1)$?

Exercice 16 – Synthèse : datation au carbone 14

La quantité de carbone 14 d'un échantillon vérifie $N' = -\lambda N$. Sa demi-vie est de 5 730 ans.

- a) Déterminer λ , arrondi à 10^{-6} près.
- b) Un échantillon archéologique contient 62 % du carbone 14 d'un échantillon vivant. Estimer son âge, arrondi à l'année.
- c) Un autre échantillon n'en contient que 2 %. Estimer son âge et commenter la fiabilité de la mesure.
- d) Au-delà de quel âge la méthode devient-elle inutilisable si l'on ne sait mesurer que des proportions supérieures à 1 % ?