

MATHÉMATIQUES

Équations différentielles

Terminale STI2D

Équation différentielle • Solution • $y' = ay$ • $y' = ay + b$
Solution constante • Condition
initiale • Refroidissement • Circuit RC • Méthode d'Euler

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité physique-chimie et mathématiques, classe terminale STI2D** (programme de 2019), partie mathématiques, « Équations différentielles ». Il couvre :

- notion d'équation différentielle et de solution ; vérification ;
- résolution de $y' = ay$ et de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) ; solution constante ;
- unicité de la solution vérifiant une condition initiale ;
- modèles physiques (décroissance radioactive, refroidissement, circuit RC) ; méthode d'Euler.

Objectif : vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle, résoudre $y' = ay$ et $y' = ay + b$, et déterminer la solution vérifiant une condition initiale.

Document pédagogique – mathlvl.fr

Table des matières

1	Équation différentielle et solution	3
2	L'équation $y' = ay$	3
3	L'équation $y' = ay + b$	3
4	Méthode d'Euler	4
5	Erreurs classiques	4
6	Fiche de synthèse	5
7	Exercices d'application	5
8	Corrigés des exercices	5

1. Équation différentielle et solution

Équation différentielle

Une **équation différentielle** relie une fonction inconnue y à sa dérivée y' . Une **solution** sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I qui vérifie l'égalité pour tout x de I .

Vérifier une solution

$f(x) = 3e^{2x}$ est solution de $y' = 2y$: $f'(x) = 6e^{2x} = 2f(x)$.

$g(x) = e^{-x} + x - 1$ est solution de $y' + y = x$: $g'(x) + g(x) = (-e^{-x} + 1) + (e^{-x} + x - 1) = x$.

2. L'équation $y' = ay$

Solutions de $y' = ay$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$ sont les fonctions

$$x \mapsto Ce^{ax}, \quad C \text{ constante réelle.}$$

Pour une condition initiale $y(x_0) = y_0$ donnée, il existe une unique solution.

Décroissance radioactive

$N' = -\lambda N$ avec $N(0) = N_0$: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. La quantité est divisée par 2 à chaque demi-vie $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

3. L'équation $y' = ay + b$

Solutions de $y' = ay + b$, $a \neq 0$

La fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \text{ réel,}$$

c'est-à-dire une solution de $y' = ay$ plus la solution constante.

Avec une condition initiale

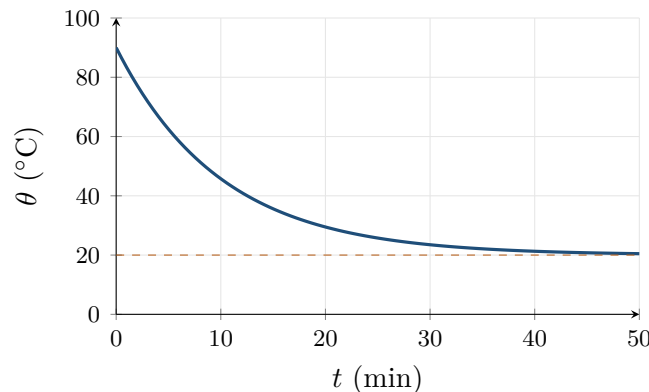
On écrit la forme générale, puis on remplace x par x_0 pour trouver C . Attention : C n'est égale à $y(0)$ que dans le cas $b = 0$.

Refroidissement

Un café à 90°C refroidit dans une pièce à 20°C selon $\theta' = -0,1\theta + 2$ (t en minutes). Solution constante : $\frac{2}{0,1} = 20$. Donc $\theta(t) = Ce^{-0,1t} + 20$, et $\theta(0) = C + 20 = 90$ donne $C = 70$:

$$\theta(t) = 70e^{-0,1t} + 20.$$

Après 10 min : $\theta(10) = 70e^{-1} + 20 \approx 45,8^\circ\text{C}$. Il atteint 30°C quand $70e^{-0,1t} = 10$, soit $t = 10 \ln 7 \approx 19,5$ min.



La température tend vers 20°C , la solution constante (asymptote en pointillés).

Charge d'un circuit RC

La tension u aux bornes du condensateur vérifie $RC u' + u = E$, soit $u' = -\frac{1}{RC}u + \frac{E}{RC}$. Avec $u(0) = 0$: $u(t) = E(1 - e^{-t/(RC)})$.

4. Méthode d'Euler

Approcher une solution

Pour $y' = f(x, y)$ avec $y(x_0) = y_0$ et un pas h : $y_{k+1} = y_k + h \times f(x_k, y_k)$. Pour $y' = y$, $y(0) = 1$: $y_{k+1} = (1 + h)y_k$, d'où $y(1) \approx (1 + h)^{1/h}$, qui s'approche de e quand h diminue ($1,1^{10} \approx 2,59$; $1,01^{100} \approx 2,70$).

5. Erreurs classiques

À éviter

- Oublier la solution constante $-\frac{b}{a}$.
- Confondre C et la valeur initiale quand $b \neq 0$.
- Se tromper de signe : la solution constante de $y' = ay + b$ est $-\frac{b}{a}$, pas $\frac{b}{a}$.
- Écrire Ce^x au lieu de Ce^{ax} .

6. Fiche de synthèse

$y' = ay$	$y = Ce^{ax}$
$y' = ay + b$	$y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$; solution constante $-\frac{b}{a}$
Condition initiale	fixe C ; solution unique
Vérifier	calculer y' et remplacer dans l'équation
Euler	$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Homogène

Résoudre $y' = -3y$ avec $y(0) = 4$.

Exercice 2 – Avec second membre

Résoudre $y' = 2y - 6$, puis déterminer la solution telle que $y(0) = 5$.

Exercice 3 – Décharge

Lors de la décharge d'un condensateur, $u' = -0,5u$ et $u(0) = 10$ V. Exprimer $u(t)$ et calculer l'instant où $u = 1$ V.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $y = Ce^{-3x}$ et $y(0) = C = 4$: $y = 4e^{-3x}$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. Solution constante $-\frac{-6}{2} = 3$: $y = Ce^{2x} + 3$. $y(0) = C + 3 = 5$ donne $C = 2$: $y = 2e^{2x} + 3$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $u(t) = 10e^{-0,5t}$. $10e^{-0,5t} = 1 \iff -0,5t = \ln 0,1 \iff t = 2 \ln 10 \approx 4,6$ s.